

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Экспериментальные методы исследования  
напряжений*

*Учебное пособие*

КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

2017

УДК 531/534  
ББК 22.251  
Г46

*Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии  
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского  
Казанского (Приволжского) федерального университета  
протокол № от октября 2017 года*

**Составители:**

канд. физ.-мат. наук **А.А. Саченков**,  
канд. физ.-мат. наук, доц. **Д.В. Бережной**,  
канд. физ.-мат. наук **О.А. Саченков**

**Рецензенты:**

докт. физ.-мат. наук, проф. **М.Н. Серазутдинов**,  
докт. физ.-мат. наук, проф. **Р.А. Каюмов**

**Экспериментальные методы исследования напряжений:** учеб. пособие /  
А.А. Саченков, Д.В. Бережной, О.А. Саченков, – Казань: Казан. ун-т, 2017. – 43 с.

Данное пособие предназначено для использования в лабораторном практикуме, сопровождающем изучение спецкурса «Экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций», который преподается студентам – механикам на старших курсах.

Пособие включает описание шести лабораторных работ по электротензометрии, знакомящих с возможностями метода и охватывающих некоторые важные разделы механики деформируемого твердого тела. Лабораторные работы посвящены определению концентрации напряжений, исследованию плоского напряженного состояния с помощью розеток тензорезисторов, разделению изгибных и мембранных напряжений в тонкостенных элементах конструкций, исследованию напряженного состояния при динамических воздействиях, измерению напряжений во вращающихся дисках.

Помимо описаний лабораторных работ пособие содержит изложение сведений общего характера, необходимых для их выполнения. Кратко освещается метод хрупких лаковых покрытий, рассматриваются теоретические основы метода электротензометрии, способы подключения тензорезисторов, дается описание измерительных схем, тензометрической аппаратуры и методов ее калибровки.

УДК 531/534  
ББК 22.251

© Саченков А.А., Бережной Д.В., Саченков О.А. 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Содержание.....	3
МЕТОД ХРУПКИХ ТЕНЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ .....	4
ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИЕ. ....	9
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОМЕТРЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ....	11
ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОЭФФЕКТЕ.....	12
ПРОВОЛОЧНЫЕ ТЕНЗОРЕЗИСТОРЫ.....	14
ФОЛЬГОВЫЕ ТЕНЗОРЕЗИСТОРЫ. ....	17
МОСТОВАЯ СХЕМА. ....	18
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РОЗЕТОК ТЕНЗОРЕЗИСТОРОВ. ....	21
КАЛИБРОВКА ТЕНЗОИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ. ....	23
ПРИМЕРЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ЭЛЕКТРОТЕНЗОМЕТРИИ. ....	25
Лабораторная работа № 1. Растяжение полосы с отверстием. ....	25
Лабораторная работа № 2. Испытание консольной балки при комбинированном нагружении. ....	27
Лабораторная работа №3. Нелинейный изгиб пластины под действием равномерного давления. ....	28
Лабораторная работа №4. Исследование установившихся колебаний консольной балки.....	32
Лабораторная работа №5. Напряженное состояние пластинки при ударе. ....	34
Лабораторная работа № 6. Измерение напряжений на вращающемся диске. ....	36
ЛИТЕРАТУРА.....	43

## МЕТОД ХРУПКИХ ТЕНЗОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ

Метод хрупких тензочувствительных покрытий является простым и эффективным методом экспериментального исследования деформаций и напряжений на поверхности деталей, узлов конструкций и моделей при статическом и динамическом нагружении. С его помощью можно оценивать величину деформации, определять зоны концентрации напряжений и направления главных деформаций. Этот метод заключается в наблюдении трещин, образующихся при нагрузке или разгрузке детали в тонком слое хрупкого покрытия, предварительно нанесенного на исследуемую поверхность.

Было замечено, что в окалине на поверхности горячекатаных стальных профилей при их деформации развиваются тонкие трещины. Фактически, это наблюдение послужило основой дальнейшего развития метода.

Тонкое покрытие прочно связано с поверхностью детали, поэтому деформации в точках покрытия и соответствующих точках поверхности одинаковы. Трещина в хрупком покрытии возникает при некоторой величине относительного удлинения создаваемого в месте образования трещины при нагружении детали. Направление трещины перпендикулярно направлению главной деформации. Величина относительной деформации  $\varepsilon_0$ , при которой образуется трещина, называется постоянной покрытия. Она определяется путем тарировки с помощью стандартной балки в условиях одноосного растяжения. Чем стабильнее тензочувствительность покрытия, тем точнее можно произвести оценку деформаций, возникающих в детали. Разработанные до настоящего времени хрупкие покрытия позволяют оценивать величины деформаций с точностью до 15-20%.

Трещины в покрытии возникают в зонах действия растягивающих напряжений. Вместе с тем, если нанести покрытие на поверхность деформированной детали и после полимеризации произвести разгрузку, то образовавшиеся трещины выявят области сжимающих напряжений. Зоны концентрации напряжений определяют по степени сгущенности сетки трещин.

К настоящему времени известны хрупкие покрытия трех основных типов:

1. Канифольное покрытие. Сюда относится канифольное покрытие с растворителем, наносимое в жидком виде, как лак, а также канифольное покрытие без растворителя, которое наносится наплавлением или газоплазменным напылением

2. Эмалевое покрытие. Оно используется для исследования деформаций при повышенных температурах.

3. Оксидное покрытие.

Величина тензочувствительности хрупких покрытий и точность оценки уровня напряжений зависят от типа и состояния покрытия, условий и способов его нанесения, условий формирования покрытия на поверхности детали и условий испытания.

Ранее, при испытаниях элементов конструкций в условиях неэкстремальных температур применяли различные виды тензочувствительных покрытий с весьма малой стабильностью. С их помощью можно было получить лишь качественные выводы о характере напряженно-деформированного состояния поверхности детали. Усовершенствование метода было достигнуто с применением покрытий из обработанной канифоли (обработка окисью цинка или окисью бария), растворенной в сероуглероде. К этому типу покрытий относятся покрытие «стресскот» и покрытие «ИМАШ», разработанные в институте Машиноведения.

Лаковое покрытие наносится на очищенную и обезжиренную поверхность детали мягкой кистью или пульвелизатором. Толщина слоя составляет 0,05-0,1 мм. Покрытие наносится при комнатной температуре и сушится в течение суток. Для удобства наблюдения трещин в покрытии на поверхность детали предварительно наносится подслойка, представляющая из себя двухпроцентный раствор нитроклетчатки в этилацетате с добавлением 0,4 % алюминиевой пудры.

Для получения количественных результатов покрытие одновременно наносится на поверхность испытуемой детали и на поверхность тарировочного образца, представляющего из себя консольно закрепленную балочку, изготовленную из стали с высоким пределом пропорциональности. Нагружая тарировочный образец и отслеживая нагрузку, соответствующую появлению первых трещин, несложно определить величину деформации в данный момент, то есть постоянную покрытия  $\varepsilon_0$ . Для более строгой количественной оценки величин напряжений постоянная покрытия  $\varepsilon_0$  должна быть определена как можно более точно. Ввиду этого необходимо испытывать нескольких тарировочных образцов и по результатам находить среднее значение  $\varepsilon_0$ .

Хрупкие лаковые покрытия на канифольной основе с сероуглеродом в качестве растворителя, несмотря на токсичность и огнеопасность, нашли применение при исследовании напряженно-деформированного состояния и в качестве самостоятельного метода и в сочетании с

методом электротензометрии. Получение хрупкого покрытия на канифольной основе на поверхности испытываемой детали возможно также методом наплавления или газоплазменного напыления. В первом случае деталь нагревается примерно до  $140^{\circ}\text{C}$  и затем по ее поверхности проводят палочкой из смолы. После охлаждения детали с покрытием до комнатной температуры возможно проведение испытаний. Однако, такое покрытие пригодно лишь для качественного исследования ввиду невысокой стабильности постоянной покрытия  $\varepsilon_0$ .

При газоплазменном нанесении материал покрытия (резинат бария) в виде мелкодисперсного порошка пропускается через пламя газовой горелки, расплавляется в нем и попадает на деталь, где затвердевает, образуя хрупкий слой. Качество покрытия при таком нанесении определяется составом дисперсного порошка, тепловым режимом, скоростью подачи порошка, температурой поверхности детали и углом наклона струи порошка к поверхности детали. Способ газоплазменного нанесения хрупкого покрытия не связан с использованием токсичного растворителя и покрытие при этом не требует длительной сушки перед испытанием. Кроме того, обрабатываемая поверхность детали может иметь сложную форму и не требует значительного предварительного нагрева, Все это обеспечивает преимущество метода газоплазменного напыления покрытия перед методом лакового нанесения и методом наплавления.

Хрупкие покрытия на канифольной основе имеют тензочувствительность  $\varepsilon_0 = 3 \times 10^{-4} - 20 \times 10^{-4}$  с отклонением порядка 15%, и позволяют проводить исследования при температуре не выше  $50^{\circ}\text{C}$ . При более высокой температуре такое покрытие размягчается. Подобного недостатка лишено эмалевое покрытие, которое перед нанесением представляет из себя взвесь мелкодисперсного порошка керамики. Покрытие наносится на исследуемую деталь пульверизатором или путем погружения детали. Нанесенный слой подсушивается, а затем деталь нагревается до температуры  $500 - 600^{\circ}\text{C}$ . При этом происходит оплавление покрытия и обеспечивается его хорошая адгезия с поверхностью детали. Эмалевое покрытие допускает возможность испытаний при температурах до  $300^{\circ}\text{C}$ . На его свойства не влияют влажность и незначительные колебания температуры. К недостаткам относятся сложность приготовления и нанесения на поверхность детали. Кроме того, температурные условия их нанесения могут выдержать не все конструкционные материалы. Канифольные покрытия также не лишены недостатков. Они требуют стабильной температуры и

влажности помещения, где проводится сушка покрытия. Им свойственна ползучесть. На их свойствах сказываются время и условия хранения.

Дальнейшие разработки в этой области в последние годы позволили получить покрытие со стабильными характеристиками путем оксидирования алюминиевой фольги, которая при испытании наклеивается на деформируемую деталь.

Анодное оксидирование деталей из алюминия и его сплавов в электролитах на основе серной, щавелевой, хромовой и других кислот используется в промышленности для получения защитных, изоляционных и декоративных покрытий, а также для других целей.

Поскольку оксидный слой, получаемый при электрохимической обработке алюминия и его сплавов отвечает требованиям, предъявляемым к хрупким тензочувствительным покрытиям, данный вариант реализации метода оказался весьма удачным. Оксидное тензочувствительное покрытие можно получить непосредственно на поверхности детали, если она изготовлена из алюминия и его сплавов. Другой способ заключается в нанесении слоя алюминия на поверхность детали с последующим его оксидированием. Однако, наиболее универсальным является третий, упомянутый выше способ, в соответствии с которым на поверхность детали наклеивается предварительно оксидированная алюминиевая фольга. Тензочувствительность такого покрытия, полученного при соблюдении технологических условий оксидирования алюминия, равна  $\varepsilon_0 = 6 \times 10^{-4} - 8 \times 10^{-4}$ , что соответствует постоянной покрытия по напряжениям для стали ( $\sigma_0 = 1200 - 1600 \text{ кг} / \text{см}^2$ ).

Метод хрупких тензочувствительных покрытий может считаться одним из самых простых и наглядных методов исследования напряженно-деформированного состояния поверхности нагруженных деталей. Вместе с тем, простота реализации характерна лишь для покрытий на канифольной основе, а они хорошо демонстрируют только качественную картину распределения деформаций. Получение количественных характеристик напряженно-деформированного состояния требует очень тщательного нанесения слоя лака и последующей тарировки, либо использования покрытия из эмали или оксидного. В этом случае говорить о простоте метода уже нельзя.

Метод хрупких тензочувствительных покрытий, как правило, используется в сочетании с другими, более точными экспериментальными методами. Определяются лишь зоны концентрации напряжений и направления главных напряжений. Количественные

характеристики напряженно-деформированного состояния могут быть определены другими методами, например, методом электротензометрии.



## ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИЕ.

Тензометр – это прибор для измерения деформаций. В настоящее время существует большое количество типов тензометров, которые классифицируются по различным признакам. При измерении деформации рассматривается удлинение некоторого фиксированного участка на поверхности исследуемой детали. Длина этого участка определяет базу тензометра. В зависимости от длины базы различают тензометры с короткой базой (до 5 мм), средней базой (порядка 20 мм) и длинной базой (30 мм и более). Ни один тензометр не способен определить деформацию в точке. Всегда определяется среднее значение деформации на базовом участке. Чем короче база, тем ближе среднее значение деформации к значению деформации в точке. Однако, в целом, тензометры с длинной базой более точные.

Тензометры, у которых шкала находится в блоке прибора, вблизи базы, называются тензометрами с прямым отсчетом. У тензометров с дистанционным отсчетом показаний шкала отделена от базы. Другим, обычно используемым критерием оценки тензометров, является метод измерения удлинения базы. В соответствии с этими методами тензометры делятся на группы:

- механические
- пневматические
- акустические
- оптические
- электрические
- комбинированные.

В каждой из этих групп можно провести дальнейшее деление на подгруппы. Например, электрические тензометры можно разделить на тензометры сопротивления, индуктивные, емкостные, фотоэлектрические, пьезоэлектрические и т.д.

Каждый тензометр должен иметь достаточную чувствительность и точность. Есть и другие требования. Чтобы тензометр не оказывал влияние на напряженно-деформированное состояние в области измерения деформации, он должен иметь малое измерительное усилие и малый вес. Это особенно важно при измерении динамических деформаций. Кроме того, в этом случае тензометр должен обладать и вполне определенными частотными характеристиками.

Для удобства применения тензометр должен легко прикрепляться на поверхности тела, иметь небольшие габариты и небольшую базу. Последнее позволяет использовать его в труднодоступных местах и на

изогнутой поверхности. Также прибор должен хорошо противостоять воздействию агрессивной среды.

Наиболее простыми способами измерения удлинений являются механические. Особенно хорошо они зарекомендовали себя при статических испытаниях.

В первых механических тензометрах контрольные расстояния измерялись щупами или измерителями с нониусом. При этом удовлетворительная точность обеспечивалась лишь при значительной базе тензометра (порядка 50-100 мм).

Современные механические тензометры имеют, как правило, рычажную кинематическую схему. Подобная схема позволяет производить измерения с увеличением в 100-3000 раз. Чтобы обеспечить легкость рычажной передачи рычаги устанавливаются в призмах. Наиболее известными из таких приборов являются тензометры Гугенбергера с увеличением в 300-2000 раз и базой 10, 20 мм. В других приборах в комбинации с рычажной схемой используются стандартные индикаторы часового типа с пределом измерения до 0,001 мм. Кинематическая схема индикаторных тензометров очень проста и имеет небольшой коэффициент увеличения. Это обеспечивает достаточную точность приборов и удобство в использовании. К механическим тензометрам, не имеющим рычажной схемы, относится тензометр Иогансона. В нем соответственно изменению базовой длины изменяется степень закручивания тонкой стальной ленты, на что указывает закрепленная с ней стрелка.

Недостатком всех механических тензометров является их значительная база. Это не позволяет использовать их для исследования местных перенапряжений, сосредоточенных на малой площади. В какой-то мере этого недостатка лишены механические тензометры с оптической передачей результатов измерения. Система рычагов в таких тензометрах при изменении базовой длины приводит во вращение зеркало, вызывающего в свою очередь отклонение светового луча. При этом отклонение луча пропорционально деформации. Работающий по такой схеме тензометр Туккермана обладает относительно высокой чувствительностью, реагируя на деформации порядка  $2 \times 10^{-6}$ . Его база имеет длину 6 мм. Такой прибор может быть использован для измерения динамических деформаций.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОМЕТРЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ.

Измерение деформации тензometрами сопротивления основано на изменении электрического сопротивления проводника при его деформации. Это явление было замечено еще в 1856 году английским естествоиспытателем Томсоном (лордом Кельвином), но довольно долго никак не было использовано. В 1881 году русский физик О.Д. Хвольсон установил, что при растяжении или сжатии проволоки меняются не только ее геометрические размеры, но и удельное сопротивление. Современная электронная физика объясняет это явление изменением числа свободных электронов на единицу объема проводника при деформировании последнего.

В 1923 году американский экспериментатор Бриджмен подтвердил результаты, полученные Томсоном, проведя серию опытов с проволокой под гидростатическим давлением. Первые попытки использования проволоки для измерения деформаций в других телах были предприняты в 1930 году. При этом возникали серьезные трудности, связанные с техникой крепления чувствительной к деформации проволоки, ее тарировкой и т. д.

В 1937 году Е. Симмонс из Калифорнийского технологического института стал наклеивать тонкие проводники на поверхность исследуемой детали и установил, что проволока точно повторяет деформацию объекта и, таким образом, по изменению сопротивления проводника данная деформация может быть определена. Почти в то же время А. Рюдж из Массачусетского технологического института стал наклеивать деформируемую проволоку на бумажную подложку, присоединив к ней более толстые подводящие провода. Фактически этим было положено начало изготовления проволочных тензорезисторов. Использование датчиков сопротивления для измерения деформаций оказалось очень удачным и многообещающим и получило дальнейшее развитие в США во время второй мировой войны и в послевоенные годы. Особенно широко они использовались там, где использование существовавших на то время тензometров было невозможно, например, в авиации. В СССР электротензометрия стала активно внедряться в исследовательскую практику в конце пятидесятых годов. В настоящее время электрические датчики сопротивления являются почти идеальным средством определения деформации в заданной точке поверхности исследуемой детали. Особенно удобно их применение в сочетании с некоторыми другими экспериментальными методами, например, методом хрупких тензочувствительных покрытий.

## ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОЭФФЕКТЕ.

Изменение удельного сопротивления проводящих материалов при растягивающих или сжимающих деформациях называется тензорезистивным эффектом (тензоэффектом). Величина электрического сопротивления проводника определяется из соотношения

$$R = \rho \frac{l}{F} \quad (1)$$

Здесь:  $R$  - сопротивление проводника (ом);  $\rho$  - удельное сопротивление проводника (ом $\times$ мм<sup>2</sup>/м);  $l$  - длина проводника (м);  $F$  - площадь поперечного сечения (мм<sup>2</sup>).

Таким образом:  $R = f(l, F, \rho)$ . Логарифмирование выражения (1) приводит к соотношению

$$\ln R = \ln \rho + \ln l - \ln F \quad (2)$$

Дифференцируя (2), получаем:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dF}{F} \quad (3)$$

В этом соотношении  $\frac{dl}{l} = \varepsilon$  - относительное удлинение (деформация). Кроме того, исследованиями Фореста было установлено наличие линейной зависимости между деформацией  $\varepsilon$  и относительным изменением удельного сопротивления  $\frac{d\rho}{\rho}$ :

$$\frac{d\rho}{\rho} = m\varepsilon \quad (4)$$

Здесь  $m$  - коэффициент изменения удельного сопротивления. Отношение  $\frac{dF}{F}$  представляет из себя относительное изменение площади поперечного сечения проводника, которое при удлинении является отрицательным. Если проводник имеет круглое поперечное сечение радиуса  $r$ , то  $F = \pi r^2$ . В этом случае

$$\frac{dF}{F} = -\frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = -\frac{2dr}{r} \quad (5)$$

Если учесть, что коэффициент Пуассона  $\mu$  имеет вид  $\mu = -\frac{dr}{r\varepsilon}$ , то

$$\frac{dF}{F} = -2\frac{dr}{r} = 2\mu\varepsilon \quad (6)$$

Таким образом, выражение (3) может быть переписано в виде

$$\frac{dR}{R} = m\varepsilon + \varepsilon + 2\mu\varepsilon = (m+1+2\mu)\varepsilon \quad (7)$$

Обозначая  $S = m+1+2\mu$ , получим основной закон тензоэффекта для проволочного проводника  $\frac{dR}{R} = S\varepsilon$ , или, переходя к конечным величинам

$$\frac{\Delta R}{R} = S\varepsilon \quad (8)$$

В этом уравнении:  $R$  - сопротивление недеформированной проволоки;  $\Delta R$  - абсолютное приращение сопротивления деформированной проволоки;  $\varepsilon$  - деформация проводника;  $S$  - коэффициент тензочувствительности, который для высокоомных проволочных проводников лежит в пределах 1.9 – 3.

## ПРОВОЛОЧНЫЕ ТЕНЗОРЕЗИСТОРЫ.

Проволочный тензорезистор (рис.1) представляет из себя прямоугольную петлеобразную решетку 1, к концам которой припаяны или приварены выводы 3 из медной проволоки или фольги. Проволочная решетка зафиксирована с помощью специального клея между полосками бумаги или клеевой пленки 2, которые являются основой (подложкой).

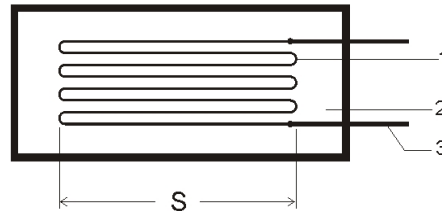


Рис. 1. Схема проволочного тензорезистора.

Материал проволоки, служащей чувствительным элементом тензорезистора, должен удовлетворять следующим требованиям:

- иметь высокое удельное сопротивление, что позволяет изготавливать малогабаритные тензорезисторы с достаточно большим сопротивлением;
- обладать высокой и стабильной чувствительностью к деформации;
- деформация и соответствующее ей сопротивление должны подчиняться линейному закону в достаточно широком диапазоне;
- нечувствительность к изменениям температуры;
- отсутствие температурной электродвижущей силы в паре с медью, что важно при питании тензорезистора постоянным током;
- отсутствие гистерезиса;
- хорошее противодействие влиянию внешней агрессивной среды;
- соответствие температурных коэффициентов линейного расширения материала проволоки и материала исследуемой детали.

Сплавов, идеально соответствующих предъявляемым требованиям, не существует. Наиболее подходящими материалами для изготовления тензочувствительной проволоки являются медно-никелевые сплавы (константан, адванс), нихромы, никельхроможелезистые сплавы (элинвар). Для массового производства тензорезисторов используется проволока из отожженного константана. Основным ее недостатком является низкий коэффициент тензочувствительности (порядка 2.1) и большая термо э.д.с. в паре с медью. Константановые тензорезисторы используются при температурах до  $200^{\circ}\text{C}$ . Для работы при больших

температурах (до  $1000^{\circ}\text{C}$ ) проволочная решетка должна изготавливаться из нихрома.

Тензочувствительная решетка фиксируется на основе с помощью специального эластичного клея. Прочностные свойства клея ограничены, поэтому, чтобы клей был способен деформировать тензочувствительную проволоку, последняя должна быть тонкой. Обычно ее диаметр составляет  $0.02 - 0.05$  мм. При таком диаметре деформации, приводящие к растрескиванию клея, намного превосходят обычно измеряемые деформации, и тензорезистор нормально работает даже при напряжениях в решетке, превосходящих предел текучести.

Основа (подложка) проволочного тензорезистора удерживает тензочувствительную решетку и электрически изолирует ее от испытываемой детали. Основа должна быть механически прочной, эластичной, хорошо приклеиваться, обладать влаго- и термостойкостью, а также хорошими изолирующими свойствами. Она не должна быть подвержена гистерезису и свойству ползучести.

При температуре до  $70-100^{\circ}\text{C}$  для материала основы вполне подходит специальная бумага (пергамин) толщиной не более  $0.05$  мм. Лучшие качества (меньшая ползучесть, более высокая влагостойкость и повышенные изолирующие свойства) демонстрирует подложка, изготовленная из пленки на основе полимеризующихся клеев и лаков (клеи БФ-2, ВС-10Т, лаки ВЛ-4, ВЛ-931, циакрин и т.д.) Малая ползучесть такой основы особенно актуальна при измерении длительных статических деформаций. Тензорезисторы на пленочной основе способны работать при температуре до  $150^{\circ}\text{C}$ .

Для работы при температурах до  $250^{\circ}\text{C}$  в качестве основы используется специальная жаропрочная бумага с асбестовыми волокнами или пергамин, пропитанный термостойким клеем. Высокотемпературные тензорезисторы, работающие при температурах  $400-800^{\circ}\text{C}$ , изготавливают в виде проволочной решетки, закрепленной с помощью жаропрочного цемента на фольге из нержавеющей стали или вовсе без основы.

Недостатком всех проволочных тензорезисторов на основе является наличие поперечной чувствительности. Этому недостатка лишены специальные ненаклеиваемые тензорезисторы без основы, предназначенные для измерения перемещений и усилий.

Проволочные тензорезисторы классифицируются по двум признакам:

- по температурному диапазону работоспособности;
- по типу применяемой основы.

По первому признаку тензорезисторы делятся на три группы:

1. Тензорезисторы массового применения для температур менее  $100^{\circ}\text{C}$  (обычно  $50-70^{\circ}\text{C}$ )

2. Тензорезисторы для повышенных температур с верхним пределом  $250-300^{\circ}\text{C}$ .

3. Высокотемпературные тензорезисторы, используемые при температурах выше  $400^{\circ}\text{C}$ .

По второму признаку их делят также на три группы:

1. Тензорезисторы на бумажной основе.

2. Тензорезисторы пленочной основе.

3. Тензорезисторы на металлической основе.

В маркировке проволочного тензорезистора указывается коэффициент тензочувствительности, материал тензорешетки, материал основы, длина базы, величина омического сопротивления, тип клея и класс качества тензорезистора.

Примеры: 1). 2ПКБ-10-100ГА.

2 – коэффициент тензочувствительности;

ПК – тензорешетка проволочная, константановая;

Б – бумажная основа;

10 – длина базы в миллиметрах;

100 – сопротивление 100 ом;

Г – клей горячей полимеризации;

А- класс качества изготовления.

2). 2ПКП-5-50-ХВ.

Тензорешетка проволочная, константановая, основа пленочная, клей холодного отверждения, класс качества изготовления «В».



## ФОЛЬГОВЫЕ ТЕНЗОРЕЗИСТОРЫ.

Фольговые тензорезисторы имеют чувствительную решетку, изготовленную из константановой фольги толщиной 2 - 10 микрон. В качестве основы обычно применяется не бумага, а специальная пленка или тонкий слой лака с хорошими диэлектрическими и адгезионными свойствами. Основные преимущества фольговых тензорезисторов по сравнению с проволочными заключаются в следующем:

- увеличенная площадь соединения решетки с основой, что делает его более прочным и повышает стабильность измерений;
- увеличенная теплоотдача, что расширяет диапазон рабочей температуры и позволяет увеличить ток, питающий схему. При этом появляется возможность в ряде случаев отказаться от усилителя;
- широкие перемычки на изгибах решетки сводят к нулю поперечную чувствительность тензорезистора.

Фольговые тензорезисторы делятся на три основных типа: прямоугольные, розеточные и мембранные. В зависимости от числа чувствительных решеток они бывают одноэлементные и многоэлементные.

Розеточными называются тензорезисторы, имеющие две, три или четыре решетки, расположенные на одной основе под определенным углом друг к другу. Они используются для исследования плоского напряженного состояния испытуемой детали.

С помощью мембранных тензорезисторов измеряют деформации радиального и тангенциального направлений, которые возникают в круглых пластинах (мембраны, диафрагмы и т.д.)

В условных обозначениях фольговых тензорезисторов принят тот же принцип, что и у проволочных. Первые две буквы (ФК) определяют вид тензорешетки (фольговая, константановая). Третья буква (П, Р, М, С) указывает на тип тензорезистора (прямоугольный, розеточный, мембранный, специальный). Четвертая буква (А, Б, В, Г, Д) указывает на принадлежность к той или иной подгруппе.

## МОСТОВАЯ СХЕМА.

Относительное изменение сопротивления тензорезистора невелико, обычно не превышает долей процента. В связи с этим для повышения точности измерения деформации используются мостовые схемы включения датчиков (мост Уитсона). Схема моста приведена на рис.2.

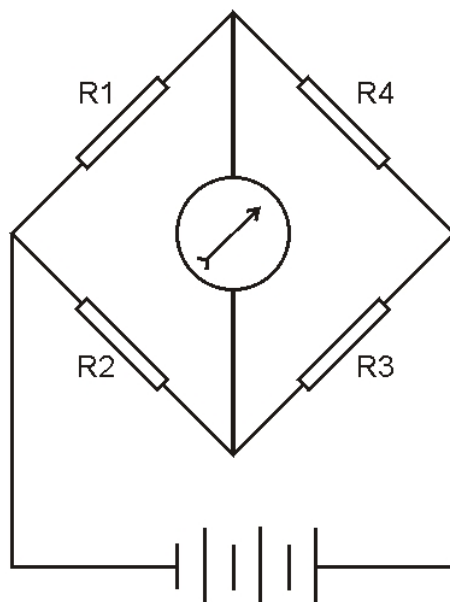


Рис. 2. Мостовая схема

Мостовая измерительная схема состоит из рабочего датчика сопротивления  $R_1$ , наклеенного на деформируемую деталь, и дополнительных трех резисторов  $R_2, R_3, R_4$ . К измерительной диагонали моста подключен измерительный прибор, а на другую диагональ подается питающее напряжение  $u$ . В большинстве случаев входное сопротивление регистрирующего прибора очень велико, поэтому отвлечением тока в измерительную диагональ можно пренебречь. Разность электрических потенциалов на измерительной диагонали определяется выражением

$$V = \frac{u(R_1 R_2 - R_2 R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (9)$$

Обращение в ноль разности потенциалов говорит о сбалансированности моста. Условием этого является соотношение

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (10)$$

Обычно, для обеспечения сбалансированности моста резисторы подбирают парами:  $R_1 = R_2, R_3 = R_4$ . Причем резисторы каждой пары

должны не просто иметь равное сопротивление, но быть полностью идентичными. При этом условии обеспечивается высокая температурная стабильность схемы. Резистор  $R_2$ , парный рабочему тензодатчику  $R_1$ , согласно этому правилу также должен представлять собой тензодатчик, но, поскольку его сопротивление не должно изменяться в процессе измерения, его наклеивают на недеформируемый образец и помещают в непосредственной близости от рабочего датчика  $R_1$ . Это позволяет обеспечить сбалансированность мостовой схемы при изменении сопротивления рабочего датчика вследствие изменения температуры окружающей среды, ее влажности и других случайных факторов. Датчики  $R_1$  и  $R_2$  называются соответственно активным и компенсационным.

При деформации детали сопротивление активного тензорезистора изменится на величину  $\Delta R$ , определяемую соотношением (8). Это приведет к разбалансированию моста, и на его измерительной диагонали появится напряжение, которое, при малых относительных деформациях, пропорционально величине деформации

$$\Delta V = \frac{\Delta R}{4R} u = \frac{uS\varepsilon}{4} \quad (11)$$

Таким образом, измеряя напряжение на выходе моста, мы фактически измеряем деформацию. Такой метод измерения носит название метода непосредственного отсчета и реализуется в подавляющем большинстве современных тензоизмерительных устройств.

Если мост после разбалансировки, обусловленной деформацией активного датчика, снова сбалансировать путем введения в соответствующее плечо дополнительного сопротивления, то о величине деформации можно судить по величине вводимого дополнительного сопротивления. Такой метод называется компенсационным или методом нулевого отсчета. Использование компенсационного метода позволяет снизить ряд требований к отдельным узлам измерительной аппаратуры без ухудшения точности измерений. В частности, в отличие от метода непосредственного отсчета, здесь отсутствует жесткое требование стабильности питающего напряжения. Однако этот метод обладает одним серьезным недостатком – низким быстродействием, что ограничивает область его применения исследованием статических деформаций. Помимо простейшей схемы включения с одним активным тензодатчиком (рис.2) используются схемы с двумя и большим количеством активных тензорезисторов. Примером может служить

схема, аналогичная представленной на рис. 2, но отличающаяся от нее тем, что оба тензорезистора  $R_1$  и  $R_2$ , включенные в смежные плечи моста, играют роль активных тензодатчиков. Такое включение используют, например, при измерении деформации изгиба балок или кручения стержней. Тензодатчики при этом размещают на детали таким образом, чтобы испытываемые ими деформации совпадали по абсолютной величине, но различались знаком. Выходной сигнал при таком включении получается вдвое большим, чем при использовании одного активного тензорезистора.

Другой пример схемы с двумя активными тензорезисторами представлен на рис. 3.

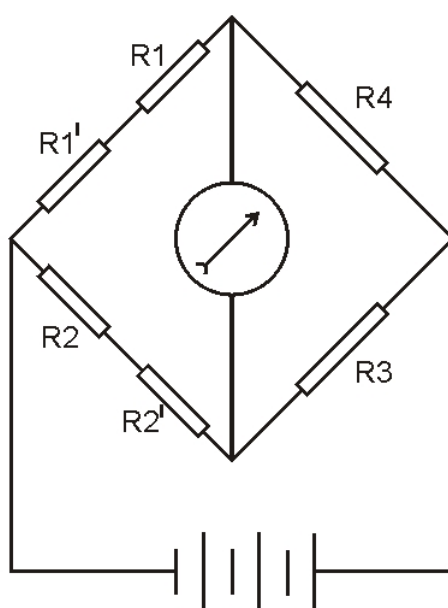


Рис. 3. Схема с двумя активными тензорезисторами

Здесь тензодатчики  $R_1$  и  $R_1^1$  включены последовательно в одно плечо моста, для выполнения условия баланса компенсационные тензорезисторы тоже включены последовательно. Такая схема используется, например, для определения суммы главных напряжений. Тензорезисторы при этом наклеивают в виде двухэлементной прямоугольной розетки. Ориентация розетки несущественна, поскольку сумма главных компонент является инвариантом тензора. Эта же схема включения, используемая при исследовании деформации стержней, позволяет при надлежащем размещении датчиков исключить влияние изгиба и регистрировать только величину продольного усилия, Удвоения чувствительности схемы при этом не происходит.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РОЗЕТОК ТЕНЗОРЕЗИСТОРОВ.

Розетки тензорезисторов используются при экспериментальном решении плоской задачи теории упругости. Известно, что плоское напряженное состояние в каждой точке характеризуется тремя параметрами – это либо три компоненты тензора напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , либо главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и угол  $\alpha$ , определяющий ориентацию главных осей. Поэтому очевидно, что для полного описания плоского напряженного состояния необходимы, как минимум, три независимых измерения при различных ориентациях тензодатчиков. Для таких измерений используют так называемые розетки тензорезисторов. Розетка – это группа датчиков, ориентированных определенным образом относительно друг друга. Наиболее широкое применение находят трех- и четырехэлементные прямоугольные розетки.

Связь между напряжениями и деформациями в случае плоского напряженного состояния определяется обобщенным законом Гука

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (12)$$

Сдвиговая компонента деформации  $\gamma_{xy}$  тензорезистором непосредственно не воспринимается, однако ее можно измерить косвенным образом, воспользовавшись правилом преобразования компонент тензора при повороте осей. В соответствии с этим правилом относительная деформация  $\varepsilon_\eta$  вдоль оси  $\eta$ , повернутой на угол  $\varphi$  относительно оси  $X$ , определяется выражением

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (13)$$

Таким образом, если измерить деформацию по осям  $X, Y, \eta$  с помощью тензорезисторов, ориентированных вдоль этих осей, то, пользуясь соотношениями (12), (13), можно вычислить компоненты тензоров напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

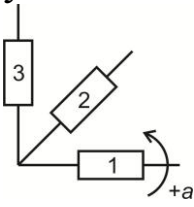
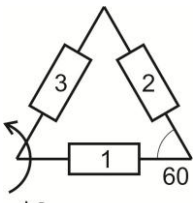
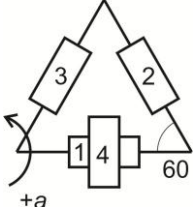
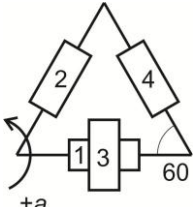
Величины главных напряжений и ориентацию главных осей определяют, используя известные формулы преобразования тензора при переходе к главным осям

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (14)$$

На самом деле все эти промежуточные выкладки делать не обязательно, так как для основных конфигураций розеток имеются готовые соотношения, позволяющие рассчитывать  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_0$

непосредственно по замеренным деформациям. Данные соотношения представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Тип розетки	Расчетные формулы	Условие
<p>Прямоугольная</p> 	$\sigma_{1,2} = \frac{E}{1-\nu} \times \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{E}{1+\nu} \times \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + [2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]^2}$	$\varepsilon_2 \succ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$
<p>Равноугольная</p> 	$\sigma_{1,2} = \frac{E}{1-\nu} \times \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \pm \frac{E}{1+\nu} \times \sqrt{\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_2}{\sqrt{3}}\right)^2}$	$\varepsilon_3 \succ \varepsilon_2$
<p>Тэ-дельта</p> 	$\sigma_{1,2} = \frac{E}{1-\nu} \times \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{2} \pm \frac{E}{1+\nu} \times \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\sqrt{3}}\right)^2}$	$\varepsilon_3 \succ \varepsilon_2$
<p>Прямоугольная из 4-х датчиков</p> 	$\sigma_{1,2} = \frac{E}{1-\nu} \times \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4} \pm \frac{E}{1+\nu} \times \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2}$	$\varepsilon_2 \succ \varepsilon_4$

Направление линии главного напряжения  $\sigma_1$  во всех случаях определяется отложением от оси первого тензорезистора известного угла. Тангенс его удвоенного значения получается отношением первой степени второго слагаемого под знаком квадратного корня в расчетных формулах к первой степени первого слагаемого.

## КАЛИБРОВКА ТЕНЗОИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ.

Под калибровкой понимается установление взаимно-однозначного соответствия между измеряемой деформацией и величиной выходного сигнала регистрирующего устройства. Для измерительной системы с линейной характеристикой калибровка сводится к определению масштабного коэффициента.

### 1. Механическая калибровка.

Механическая калибровка тензоизмерительной аппаратуры заключается в создании некоторой известной деформации с последующим наблюдением реакции измерительного устройства. Наиболее часто для проведения калибровки используется консольная балка равного сопротивления, на рабочих поверхностях которой при изгибе возникает однородное одноосное напряженное состояние с продольной деформацией

$$\varepsilon = \frac{6Pl}{Ebh^2} \quad (15)$$

Здесь  $b$  - ширина балки в месте измерения деформации,  $h$  - толщина балки,  $l$  - длина консоли,  $P$  - поперечная нагрузка.

На балку наклеиваются такие же тензорезисторы, что и на исследуемый объект. Обычно для наклейки датчиков используются обе поверхности балки, а тензорезисторы включаются в мостовую схему с удвоенной чувствительностью. Величина масштабной деформации  $\varepsilon_m$  будет при этом вдвое выше вычисленной по формуле (15).

### 2. Электрическая калибровка.

Суть этого способа калибровки сводится к следующему. Параллельно резистору, наклеенному на исследуемую деталь и включенному в измерительную мостовую схему, временно подключается дополнительный резистор с известной величиной сопротивления (так называемый масштабный резистор). В результате проводимость соответствующего плеча мостовой схемы увеличивается, а его сопротивление уменьшается на величину

$$\Delta R_m = R - \frac{R \cdot R_m}{R + R_m} = \frac{R^2}{R + R_m} \quad (16)$$

Здесь  $R$  и  $R_m$  - сопротивления тензодатчика и масштабного резистора соответственно.

Тензоизмерительная схема реагирует на это уменьшение сопротивления таким же образом, как на деформацию сжатия тензорезистора.

Воспользовавшись основной формулой тензоэффекта, можно вычислить деформацию, отвечающую изменению сопротивления  $\Delta R_m$ :

$$\varepsilon_m = -\frac{\Delta R_m}{S \cdot R} = -\frac{R}{S(R + R_m)} \quad (17)$$

Полученное соотношение позволяет установить искомую связь между деформацией и выходным сигналом тензоизмерительного устройства.

При реализации описанного способа калибровки сопротивление масштабного резистора следует выбирать так, чтобы величина эквивалентной масштабной деформации была того же порядка, что и деформация исследуемого объекта.

В тех случаях, когда используется мостовая измерительная схема с более чем одним активным тензорезистором (например, при необходимости выделить только изгибную или, наоборот, только мембранную деформацию), описанный способ калибровки также применим, однако при этом надо учитывать возможное изменение чувствительности мостовой схемы в зависимости от количества и расположения активных тензорезисторов. Универсальное соотношение, аналогичное формуле (17), записать вряд ли возможно, но в большинстве практически важных случаев справедлива формула

$$|\varepsilon_m| = \frac{R \cdot m}{n \cdot S \cdot (R \cdot m + R_m)} \quad (18)$$

Здесь  $n$  - количество активных плеч моста,  $m$  - количество тензорезисторов в каждом плече.

Ввиду своей простоты электрическая калибровка практически полностью вытеснила калибровку механическую. Не следует, однако, забывать, что ее достоверность обеспечивается только точным знанием коэффициента тензочувствительности используемых тензорезисторов. Поэтому при малейших сомнениях на этот счет следует использовать механический способ калибровки.



## ПРИМЕРЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ЭЛЕКТРОТЕНЗОМЕТРИИ.

### Лабораторная работа № 1. Растяжение полосы с отверстием.

Цель работы. На примере исследования напряженного состояния растянутой полосы, ослабленной отверстием, убедиться в существовании явления концентрации напряжений.

Известно, что при нагружении деталей, имеющих выточки, отверстия, резкие изменения поперечного сечения и другие неоднородности, возникают значительные местные напряжения, которые распространяются на сравнительно небольшую часть образца и быстро убывают по мере удаления от неоднородности. Это явление носит название концентрации напряжений.

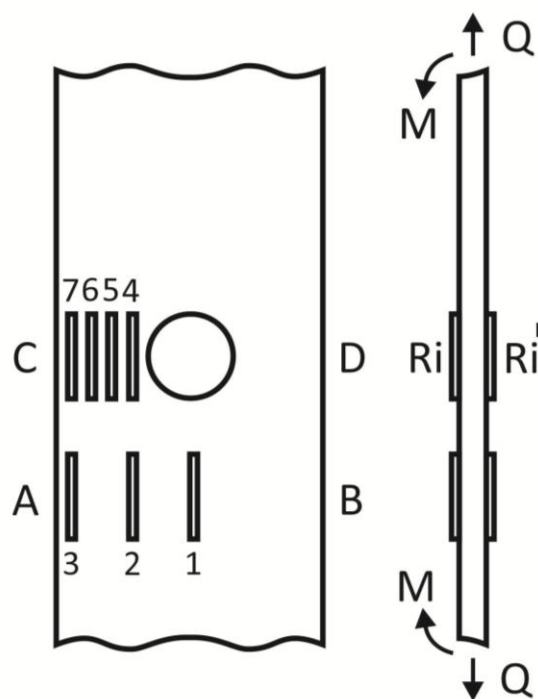


Рис. 4. Расположение тензоресисторов на образце.

Коэффициент концентрации показывает, во сколько раз наличие концентратора повышает уровень напряжений в детали.

Содержание работы. Проводится исследование напряженного состояния образца в виде полосы прямоугольного сечения шириной 60 мм и толщиной 5 мм, ослабленной в средней части отверстием диаметром 15 мм. Полоса подвергается растяжению нагрузкой, симметрично приложенной к ее концам. Нагружение осуществляется с условием того, чтобы ослабленное сечение не перешло в пластическое

состояние. Учитывая, что местные напряжения могут существенно превышать расчетное значение, коэффициент запаса должен быть не меньше четырех.

Напряжения определяются в двух сечениях: в сечении CD, ослабленном отверстием (рис. 4), и в сечении АВ, расположенном от CD на расстоянии, равном ширине полосы. Поскольку напряженное состояние в этих сечениях практически можно считать одноосным, то искомое напряжение связано с продольной деформацией Законом Гука при простом растяжении

$$\sigma = E\varepsilon \quad (19)$$

Деформации в отдельных точках рассматриваемых сечений измеряются с помощью тензорезисторов, расположение которых показано на рис. 4. Тензорезисторы наклеены попарно на обе стороны образца, так, что первой точке сечения отвечает пара резисторов  $R_1$  и  $R_1^1$ . Оба резистора играют роль активных тензодатчиков и включены последовательно в одно плечо измерительного моста. В качестве компенсационных используются также два однотипных тензорезистора, включенных последовательно. Такое включение позволяет компенсировать возможное появление изгибных деформаций, связанных с несовершенством формы образца (неплотскость) или с внецентренностью приложения растягивающих усилий.

При выполнении работы следует предварительно задаться значениями начальной и основной нагрузок. Затем, приложив начальную нагрузку, снять показания прибора по всем точкам. После этого прикладывается основная нагрузка и вновь снимаются показания. Искомая деформация, таким образом, определяется как разность деформаций при начальном и основном нагружениях.

Для повышения точности следует повторить цикл измерений не менее трех раз с последующим осреднением результатов.

Задания по выполнению работы.

1. Провести нагружение образца и измерить деформацию в сечениях АВ и CD.
2. Вычислить напряжения и построить график распределения напряжений в ослабленном сечении CD. Найти коэффициент концентрации напряжений.
3. Сравнить полученные результаты с известным решением Кирша для полосы бесконечной длины, которое в сечении CD дает следующее распределение напряжений

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{a^2}{2x^2} + \frac{3a^4}{2x^4} \right), \quad (20)$$

где  $\sigma_0$  - напряжение вдали от отверстия,  $a$  - радиус отверстия, а начало координатной оси  $x$  совпадает с центром отверстия.

4. Оценить неоднородность напряженного состояния в сечении АВ, обусловленную влиянием отверстия.

### Лабораторная работа № 2. Испытание консольной балки при комбинированном нагружении.

Цель работы. Освоить метод исследования плоского напряженного состояния с помощью розеток тензорезисторов.

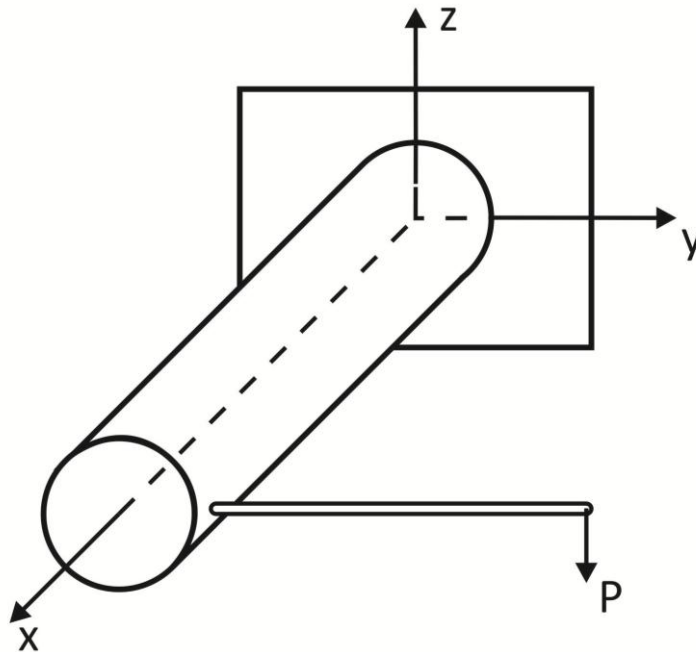


Рис. 5. Схема нагружения образца.

Содержание работы. Объектом для испытаний является консольная балка трубчатого поперечного сечения с наружным диаметром 40 мм и внутренним 36 мм, изготовленная из дюралюминия Д16Т. Нагружение балки осуществляется по схеме, представленной на рис. 5.

Меняя длину рычага, можно изменить соотношение между изгибающим и крутящим моментами. Компоненты тензора напряжений определяются в наивысшей точке сечения, удаленного от зашеченного конца трубы на некоторое расстояние, достаточное для того, чтобы конкретное распределение усилий на зашеченном конце не оказывало влияние на напряжения в рассматриваемом сечении. Напряженное состояние можно представить как суперпозицию напряжений, обусловленных изгибом:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{изг}}{W_y}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (21)$$

и кручением:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}, \quad (22)$$

где

$$W_\rho = 2W_{yy} = \frac{\pi}{16} D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Таким образом, в рассматриваемой точке при совместном действии кручения и изгиба получаются напряжения

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{изг}}{W_y}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{кр}}{2W_y}. \quad (23)$$

Для экспериментального определения напряжений в указанной точке наклеена прямоугольная четырехэлементная розетка тензодатчиков, причем один из датчиков ориентирован вдоль оси трубы, другой – перпендикулярно к ней, и еще два датчика – под углом 45 градусов. После замеров и проведения необходимых вычислений получаем все характеристики плоского напряженного состояния.

Задания по выполнению работы.

1. Задать значения изгибающего и крутящего моментов и определить соответствующую нагрузку  $P$  и длину рычага  $l$ .
2. Провести нагружение и измерить деформации, регистрируемые датчиками розетки; для исключения грубых ошибок и повышения точности измерений эксперимент необходимо проводить несколько раз с последующим осреднением результатов.
3. Найти величину главных напряжений и ориентацию главных осей, используя формулы таблицы 1. Обратит внимание на правильность нумерации датчиков.
4. Вычислить теоретические значения главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  и угла  $\alpha_0$ , воспользовавшись формулами (13). Оценить расхождения между опытными и теоретическими результатами.

### **Лабораторная работа №3. Нелинейный изгиб пластины под действием равномерного давления.**

Цель работы. Научиться разделять мембранные и изгибные напряжения в тонкостенных элементах конструкций. Убедиться в нелинейном поведении пластинки при больших прогибах.

Известно, что в случаях, когда деформация нагруженной пластины сопровождается небольшими прогибами (не превосходящими толщину), растяжения срединной поверхности не происходит, и в сечении возникают только изгибные напряжения. При этом связь деформаций и напряжений (геометрические соотношения) носит линейный характер, и в основных разрешающих уравнениях изгиба сохраняются лишь линейные члены. Если же прогибы становятся сравнимыми с толщиной, то срединная плоскость пластины начинает испытывать деформацию растяжения-сжатия, и в ней возникают мембранные усилия. При больших прогибах именно они в первую очередь определяют несущую способность пластины, в то время как при малых прогибах основную роль в этом плане играет жесткость. В качестве разрешающих уравнений используется система нелинейных уравнений Кармана. Нелинейность ее определяется как нелинейностью геометрических соотношений, так и учетом угла поворота срединной поверхности пластины при записи условий равновесия.

Необходимость разделять мембранные и изгибные напряжения при анализе работы элементов конструкций возникает в тех случаях, когда есть необходимость убедиться, что форма соответствующего элемента и условия его сопряжения с соседними элементами выбраны удачно. Принято считать, что правильно спроектированный тонкостенный элемент должен воспринимать лишь мембранные усилия. Уровень же изгибных напряжений в нем должен быть минимальным.

Содержание работы. В качестве объекта исследования берется свободно опертая пластина, изготовленная из дюралюминиевого листа толщиной 0,1 мм. Диаметр пластины – 160 мм. Нагружение осуществляется таким образом, чтобы прогиб в центре пластины примерно втрое превышал толщину. Это условие реализуется при создании избыточного давления порядка 50 кПа.

Принципиальная схема установки для проведения испытаний приведена на рис. 6.

Пластина свободно лежит на кромке цилиндрического стакана, обеспечивая при этом герметичность его плоскости. При создании внутри стакана разрежения пластина подвергается действию равномерного внешнего давления. Прогиб измеряется индикатором часового типа, давление – вакуумметром. Деформации фиксируются соответствующим образом наклеенными тензорезисторами.

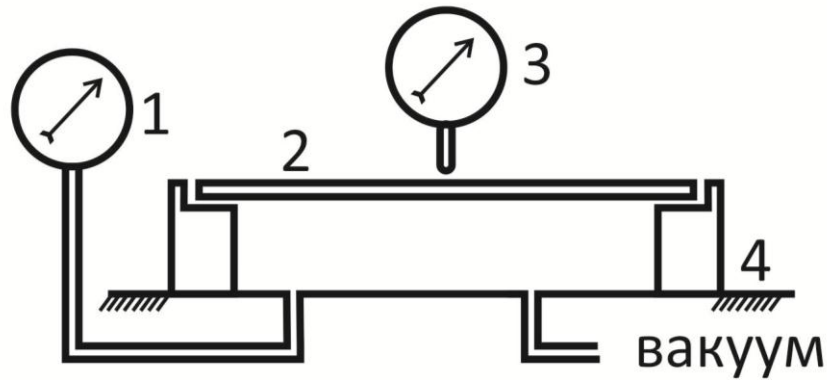


Рис. 6. Схема установки для нагружения пластины.

Выражения для усилий и моментов в срединной поверхности пластины при больших прогибах имеют вид:

Растягивающие усилия

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{r_0} + \nu\varepsilon_{\varphi_0}), \quad N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi_0} + \nu\varepsilon_{r_0}). \quad (24)$$

Сдвигающее усилие

$$S = S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = Gh\gamma. \quad (25)$$

Здесь  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\gamma$  - деформации растяжения-сжатия и сдвига в срединной плоскости пластины.

Изгибающие моменты

$$M_r = D(\chi_r + \nu\chi_\varphi), \quad M_\varphi = D(\chi_\varphi + \nu\chi_r). \quad (26)$$

Крутящий момент

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = D(1-\nu)\tau. \quad (27)$$

Здесь  $\chi_r$ ,  $\chi_\varphi$ ,  $\tau$  - изменения кривизны и кручение срединного слоя пластины,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - изгибная жесткость.

Для определения  $\varepsilon_{r_0}$ ,  $\varepsilon_{\varphi_0}$ ,  $\chi_r$ ,  $\chi_\varphi$  воспользуемся тем, что в точках сечения на расстоянии  $z$  от срединной поверхности деформации определяются из соотношений

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r_0} + z\chi_r, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_{\varphi_0} + z\chi_\varphi, \quad \gamma = \gamma_0 + 2z\tau. \quad (28)$$

Отсюда следует, что, если известны деформации  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_n$  на верхней и нижней поверхностях пластины, то деформации срединной поверхности и изменения кривизны имеют вид

$$\varepsilon_{r_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{r,s} + \varepsilon_{r,n}), \quad \varepsilon_{\varphi_0} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\varphi,s} + \varepsilon_{\varphi,n}), \quad (29)$$

$$\chi_r = \frac{1}{h}(\varepsilon_{r,s} - \varepsilon_{r,n}), \quad \chi_\varphi = \frac{1}{h}(\varepsilon_{\varphi,s} - \varepsilon_{\varphi,n}). \quad (30)$$

Значения мембранных и изгибных напряжений определяются следующим образом:

Мембранные напряжения

$$\sigma_{r,m} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{r_0} + \nu\varepsilon_{\varphi_0}), \quad \sigma_{\varphi,m} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi_0} + \nu\varepsilon_{r_0}). \quad (31)$$

Изгибные напряжения

$$\sigma_{r,u} = \frac{6D}{h^2} (\chi_r + \nu\chi_{\varphi}), \quad \sigma_{\varphi,u} = \frac{6D}{h^2} (\chi_{\varphi} + \nu\chi_r). \quad (32)$$

Таким образом, для определения мембранных и изгибных напряжений в произвольном сечении необходимо измерить радиальную и трансверсальную деформации на верхней и нижней поверхностях пластины, а затем воспользоваться соотношениями (29 – 32).

В данной работе следует определить мембранные и изгибные напряжения в центре пластины и на краю. В соответствии с описанной методикой разделения мембранных и изгибных напряжений тензорезисторы наклеивают попарно на внешнюю и внутреннюю стороны пластины. Вблизи контура пластины наклеиваются две такие пары для измерения радиальных и трансверсальных компонент деформации. Центр пластины представляет собой изотропную точку, в которой  $\varepsilon_r = \varepsilon_{\varphi}$ . Поэтому здесь достаточно одной пары тензорезисторов.

Интересно сравнить результаты эксперимента с расчетными значениями напряжений и прогиба. В соответствии с приведенным в монографии /3/ решением, уравнение стрелы прогиба в центре пластины имеет вид:

$$C_1\zeta^3 + C_2\zeta = q^*, \quad (33)$$

где  $\zeta = \frac{W}{h}$  - безразмерный прогиб,  $q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^4$  - безразмерный параметр внешней нагрузки. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  соответственно равны 0,376 и 1,436.

Напряжения изгиба

$$\sigma_{r,u} = C_3 E \left(\frac{hW}{R^2}\right), \quad \sigma_{\varphi,u} = C_4 E \left(\frac{hW}{R^2}\right). \quad (34)$$

Мембранные напряжения

$$\sigma_{r,m} = C_5 E \left(\frac{W}{R}\right)^2, \quad \sigma_{\varphi,m} = C_6 E \left(\frac{W}{R}\right)^2. \quad (35)$$

В центре пластины постоянные  $C_3 = C_4 = 1,778$ ,  $C_5 = C_6 = 0,295$ . На краю:  $C_3 = C_5 = 0$ ,  $C_4 = 0,755$ ,  $C_6 = -0,427$ .

Задания по выполнению работы.

1. Исследовать зависимость прогиба от нагрузки. Эту часть работы удобно выполнять, задаваясь некоторым шагом нарастания прогиба (например, выбрав шаг равным четверти толщины пластинки) и регистрируя значения нагрузки на каждом шаге. Построить график расчетной зависимости (33) и нанести на него экспериментальные точки.
2. Измерить деформации на поверхностях пластины сняв начальные показания при ненагруженном состоянии пластины, а конечные – при полной нагрузке.
3. По приведенным выше формулам вычислить теоретические и экспериментальные значения мембранных и изгибных напряжений. Оценить расхождение результатов.
4. Оценить границы применимости линейной теории изгиба.

#### **Лабораторная работа №4. Исследование установившихся колебаний консольной балки.**

Цель работы. Ознакомиться с возможностями применения метода электротензометрии для определения напряженно-деформированного состояния деталей конструкции в условиях установившихся колебаний. Изучить метод калибровки тензометрической аппаратуры.

Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в разнообразных динамических процессах приводит к необходимости регистрировать осциллограммы деформаций с последующим их анализом. При этом используется измерительная аппаратура, существенно отличающаяся от той, которая находит применение в статических задачах. Для регистрации деформаций используются осциллографы, а для согласования выхода измерительного тензометрического моста с регистрирующим устройством – тензоусилители. При этом результирующая чувствительность оказывается зависящей от характеристик тензодатчика, тензоусилителя и осциллографа, и для определения ее реальной величины приходится проводить калибровку измерительной системы.

Содержание работы. В качестве объекта испытаний берется стальная балочка прямоугольного поперечного сечения, один конец которой защемлен, а другой свободен. На балке закреплен электродвигатель, вал которого несет на себе эксцентрично насаженный маховик. Так как центр масс маховика не совпадает с осью вала двигателя, то, в соответствии с принципом сохранения положения центра масс, при включении двигателя его корпус, а значит и связанная с ним балка, начинают совершать колебательное движение (вибрировать).



Для определения напряжений в наиболее нагруженной зоне балки (в области заземления) наклеены два тензорезистора. Тензорезисторы размещены на противоположных поверхностях балки и включены в смежные плечи измерительного моста. При этом реализуется схема с двойной чувствительностью.

При колебаниях сигнал от датчиков, усиленный с помощью тензоусилителя, поступает на светолучевой осциллограф, позволяющий получить запись колебательного процесса на специальном носителе.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 7.

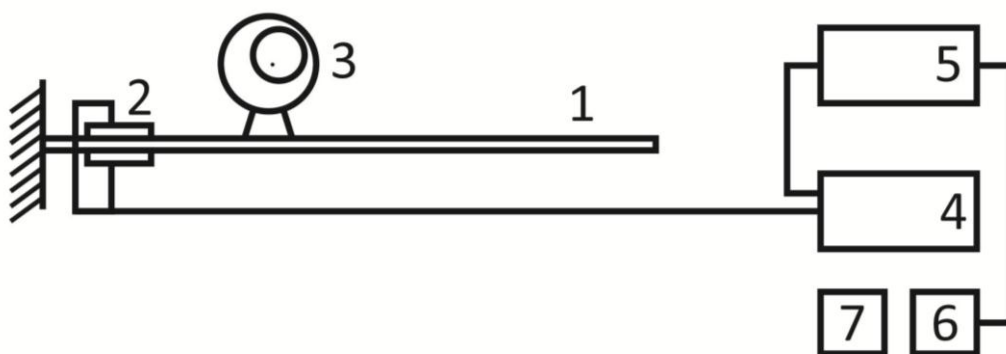


Рис. 7. Схема экспериментальной установки. 1 – балка, 2 – тензорезистор, 3 – электродвигатель с маховиком, 4 – тензоусилитель, 5 – осциллограф, 6 – блок питания осциллографа, 7 – блок питания тензоусилителя.

Записав осциллограмму на ленте, можно определить частоту колебаний по формуле

$$f = \frac{v \times n}{L}, \quad (36)$$

где  $v$  - скорость протяжки носителя,  $n$  - число колебаний в отрезке осциллограммы длины  $L$ .

Для определения максимальной величины деформации необходимо провести калибровку измерительной системы. Практически калибровка осуществляется путем записи на осциллограмме масштабного сигнала, отвечающего некоторой известной величине деформации. Масштабный сигнал записывается при пониженной скорости протяжки. Из сравнения амплитуды анализируемого сигнала  $a$  с величиной масштабного сигнала  $h_m$  можно найти максимальное значение деформации в исследуемой точке

$$\varepsilon = \varepsilon_m \frac{a}{h_m} \quad (37)$$

Значения  $a$  и  $h_m$  снимаются непосредственно с записанной осциллограммы. Методика получения масштабной деформации приведена выше.

Задания по выполнению работы.

1. Изучить описание и ознакомиться с порядком работы с осциллографом.
2. Включить электродвигатель, возбуждающий колебания балки. Добиться появления устойчивого сигнала на экране осциллографа и осуществить запись осциллограммы на носителе.
3. Провести калибровку измерительной аппаратуры одним из описанных выше способов.
4. По осциллограмме процесса колебаний определить частоту колебаний балки и величину максимальных напряжений.

### **Лабораторная работа №5. Напряженное состояние пластинки при ударе.**

Цель работы. Ознакомиться с методами регистрации быстропротекающих процессов; выявить особенности динамики развития деформаций пластинки при ударе.

В отличие от предыдущей работы, где исследовались установившиеся колебания, здесь рассматривается существенно нестационарный процесс, длительность которого измеряется тысячными долями секунды. Особенности такого рода процессов накладывают определенные требования на регистрирующую аппаратуру. Во-первых, она должна обладать достаточно широкой полосой регистрируемых частот, во-вторых, иметь возможность синхронизации, то есть инициирования начала регистрации непосредственно перед началом исследуемого процесса. Шлейфовые осциллографы не удовлетворяют этим требованиям в достаточной мере. Вместо них следует использовать электроннолучевые осциллографы, способные работать в значительно более широкой полосе частот и имеющие режим однократного запуска развертки внешним синхронизирующим импульсом. Наиболее удобны в работе при исследовании подобных процессов запоминающие осциллографы, у которых осциллограмма может быть зафиксирована непосредственно на экране и тем самым становится доступной для визуального наблюдения.

Содержание работы. Схема установки изображена на рис. 8. Исследуемый объект – круглая пластинка 1 из алюминиевого сплава Д-16, защемленная на кольцевой оправе 2 и закрепленная в вертикальном положении на основании 3. Удар по пластине наносится стальным

шариком 4, подвешенным на тонкой проволоке к кронштейну 5, электрически изолированному от основания 3. Шарик предварительно отклоняют от вертикали и фиксируют в таком положении с помощью электромагнита 6, получающего питание от источника 7. При нажатии на кнопку 8 магнит обесточивается, шарик приходит в движение и наносит удар по центру пластинки. Для измерения напряжений, возникающих в пластинке, в ее центре с тыльной стороны наклеен тензорезистор 9. Компенсационный резистор 10 размещен на массивной кольцевой оправе пластинки. Полумост подключен к тензоусилителю 11.

Для регистрации сигнала разбаланса используется запоминающий осциллограф. Запуск развертки осциллографа осуществляется простейшей схемой синхронизации, вырабатывающей сигнал запуска при касании шариком поверхности пластинки. Эта схема включает источник постоянного напряжения  $G$  и токоограничивающий резистор  $R$ . До тех пор, пока касания нет, на входе синхронизации  $C$  осциллографа поддерживается отрицательный потенциал ( $-1.5\text{ V}$ ). При касании этот потенциал увеличивается практически до нуля, а при отскоке шарика от поверхности пластинки вновь падает до прежнего значения. Если настроить систему запуска осциллографа на срабатывание по положительному фронту импульса, то начало регистрации процесса развития деформации будет соответствовать моменту первого касания шариком поверхности пластинки.

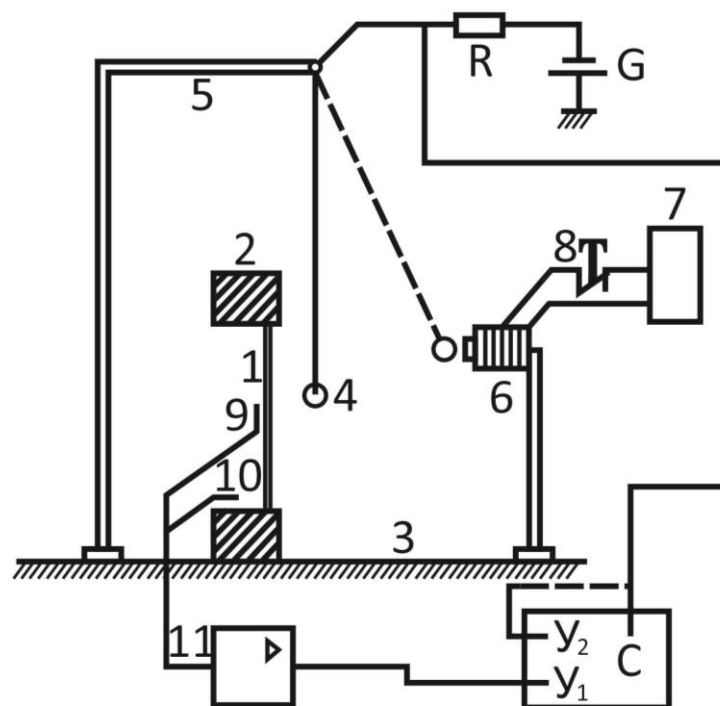


Рис. 8. Схема установки.

Если необходимо продолжительность соприкосновения шарика и пластинки при ударе, на второй канал осциллографа можно подать тот же, который используется для синхронизации. Тогда соответствующий луч прорисует на экране линию в виде ступеньки или ряда ступенек, причем соприкосновению будет отвечать высокий уровень, а отсутствию касания – низкий. При упругом ударе наблюдается обычно ряд последовательных соприкосновений.

Задания по выполнению работы.

1. Провести калибровку тензоизмерительной аппаратуры одним из вышеописанных способов.
2. Настроить систему синхронизации. Добиться устойчивой воспроизводимости осциллограмм.
3. Определить максимальные напряжения в пластинке при различных скоростях удара, меняя угол начального отклонения груза. Оценить зависимость между максимальным напряжением, импульсом или кинетической энергией ударяющего груза.

## **Лабораторная работа № 6. Измерение напряжений на вращающемся диске.**

Цель работы. Знакомство с методами электротензометрии движущихся элементов конструкций. Оценка действия центробежных сил.

В технике широко применяются конструкции, составными элементами которых являются вращающиеся с большими угловыми скоростями детали. Возникающие при вращении этих деталей центробежные силы инерции могут достигать опасного уровня. Поэтому достаточно часто возникает необходимость измерять напряженное состояние вращающихся элементов конструкций. Электротензометрия в таких условиях связана с проблемой передачи данных от тензорезисторов, размещенных на вращающейся детали к стационарной системе регистрации. Существуют различные подходы к решению этой проблемы – от использования скользящих контактов до телеметрии. Скользящие контакты, при всей очевидной простоте, служат источником дополнительных шумов и ненадежны при высоких скоростях вращения. Более совершенным устройством представляются вращающиеся трансформаторы, благодаря которым связь между тензорезистором и измерительной аппаратуры осуществляется не гальваническим, а индуктивным способом.

Однако наиболее перспективными следует считать системы телеметрии. В этих системах измерительное устройство с автономным источником питания размещается непосредственно на вращающейся конструкции, а стационарное регистрирующее устройство – на некотором расстоянии. Связь между измерительным и регистрирующим устройствами осуществляется обычно на радиочастотах, но возможно использование и других каналов связи. Для проведения многоканальных измерений применяется мультиплексирование с разделением по частоте, либо по времени /2/.

Содержание работы. При выполнении данной лабораторной работы используется трехканальная телеметрическая система ИДТ-3, разработанная в Лаборатории механики оболочек КФУ. В этой системе задействован оптический канал связи в инфракрасном диапазоне, что дает некоторые преимущества по сравнению с использованием радиоканала. Во-первых, это обеспечивает высокую помехоустойчивость системы, во-вторых, дает возможность весьма простыми средствами осуществить двустороннюю связь между измерительным блоком и стационарной регистрирующей аппаратурой и позволяет дистанционно включать выносной блок только на время измерения и проводить опрос каналов в любом удобном порядке. При этом, если ограничиться измерением только кинетостатической составляющей деформации, работа с системой ИДТ-3 почти не отличается от работы с любой лабораторной тензостанцией.

Объект исследования в данной лабораторной работе – диск диаметром 267 миллиметров и толщиной 1.9 миллиметров, изготовленный из алюминиевого сплава Д-16. В центре диска имеется отверстие диаметром 48 миллиметров, с помощью которого диск установлен на муфте, закрепленной на валу коллекторного электродвигателя. К этой муфте крепится и измерительный блок прибора ИДТ-3. Крепление диска к муфте осуществляется таким образом, что фактически реализуются граничные условия свободного края. Для вращающегося диска с такими граничными условиями напряженное состояние, обусловленное действием центробежных сил, описывается следующими соотношениями /4/:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2), \\ \sigma_\varphi &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2),\end{aligned}\quad (38)$$

где  $a$ ,  $b$  - радиусы внутренней и внешней границ диска,  $\rho$  - плотность материала диска,  $\omega$  - угловая скорость вращения диска.

Эти формулы представляют собой точное решение уравнений теории упругости и вполне надежно описывают напряженное состояние рассматриваемого объекта в линейной области поведения материала. Проведение тензометрии в данном случае преследует цель проверить надежность и точность измерительной системы. Дело в том, что при быстром вращении выносного измерительного блока на элементы его электрической схемы действуют довольно значительные инерционные нагрузки, которые могут повлиять на параметры этих элементов и вызвать тем самым существенные погрешности измерения.

Тензодатчики расположены на расстоянии 40 мм от центра диска. Два датчика ориентированы в радиальном направлении, другие два – в тангенциальном. Пара компенсационных тензорезисторов наклеена на свободной от нагрузок части муфты. Подключение датчиков выполнено так, что первый канал измеряет радиальную составляющую деформации  $\varepsilon_r$ , второй – тангенциальную  $\varepsilon_\varphi$ , а третий – их разность  $\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi$ . Таким образом, согласие в показаниях прибора по этим трем каналам может служить косвенным указанием на правильность его работы.

Измерение деформации следует проводить следующим образом: снять начальные показания по всем каналам, затем диск раскрутить до установившейся рабочей скорости, например до 10 тыс. об/мин (скорость вращения необходимо контролировать цифровым частотомером) и найти приращение показаний. Контрольная серия измерений должна включать не менее трех последовательных пусков с одной и той же рабочей скоростью. Соответствующие приращения показаний прибора следует свести в таблицу и вычислить среднее приращение для каждого канала.

Задание по выполнению работы.

1. Подготовить к работе телеметрическую систему ИДТ-3.
2. Провести калибровку.
3. Настроить систему контроля угловой скорости.
4. Провести измерение деформаций на вращающемся диске.
5. По замеренным деформациям рассчитать значения радиального и тангенциального напряжений.
6. Сравнить найденные значения с расчетными, полученными по формулам (38).
7. Найти предельно допустимое по условиям прочности значение угловой скорости вращения для данного диска.

## Приложение. Телеметрический измеритель деформаций ИДТ-3.

Прибор ИДТ-3 предназначен для тензометрии вращающихся узлов и деталей машин с беспроводной передачей данных по оптическому каналу связи в инфракрасном диапазоне. Он может быть использован для измерения для измерения как кинетостатических деформаций, обусловленных действием центробежных сил, так и динамических составляющих деформаций, вызванных вибрацией или связанных с циклическим взаимодействием элементов конструкций. При этом кинетостатические деформации отсчитываются по цифровому индикатору прибора, а динамические составляющие анализируются с помощью осциллографа, подключенному к аналоговому выходу. Блок-схема прибора представлена на рис. 9-10.

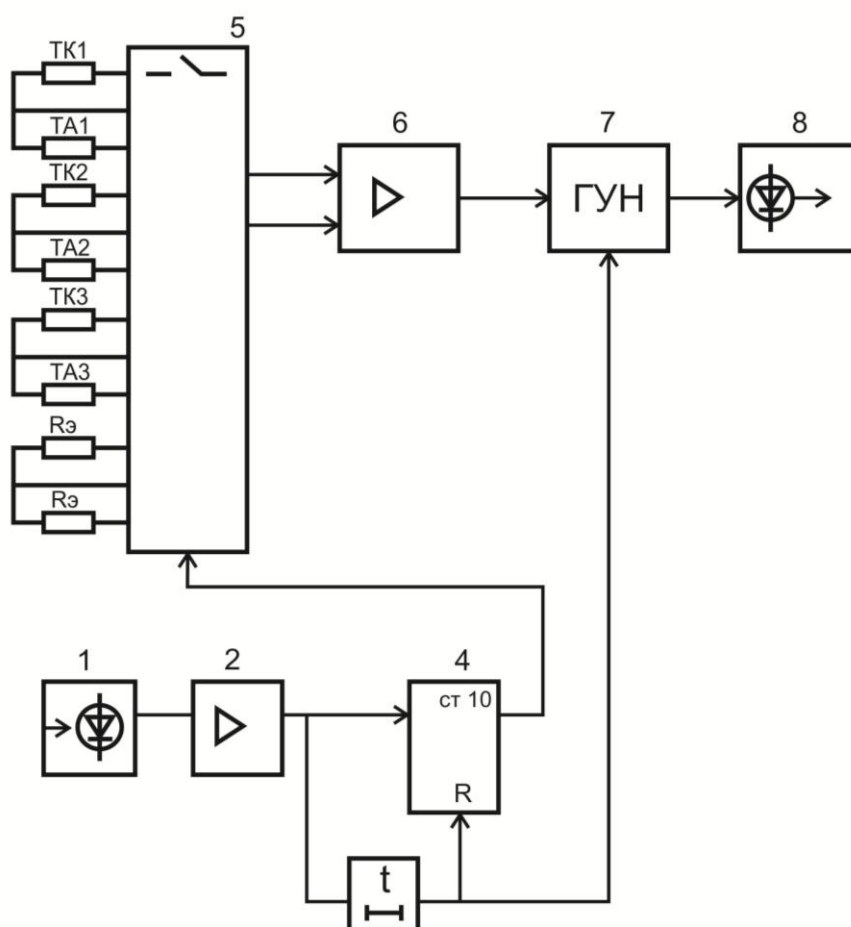


Рис. 9. Блок-схема прибора.

Выносное измерительное устройство (рис. 9) состоит из фотоприемника 1, усилителя 2, таймера 3, счетчика 4, мультиплексора 5, усилителя 6, генератора управляемого напряжения 7, излучающего диода инфракрасного диапазона 8.

Работает выносное измерительное устройство следующим образом. При поступлении на фотоприемник 1 импульсов инфракрасного излучения, инициируемых устройством управления и регистрации, на

выходе усилителя 2 возникает последовательность электрических импульсов, количество которых определяется командой, сформированной устройством управления и регистрации. Эти сигналы поступают на вход десятичного счетчика 4, устанавливая его в соответствующее состояние и одновременно запуская таймер 3, который должен вернуть счетчик в исходное (нулевое) состояние после выполнения цикла измерений (приблизительно через 1 с). В зависимости от состояния счетчика 4 мультиплексор 5 подключает ту или иную пару тензорезисторов  $TA_i$ ,  $TK_i$  или эталонные резисторы  $R_{э}$ . После усилителя 6 сигнал дисбаланса поступает на вход управления генератора 7, что существенно снижает энергопотребление. Измерительное устройство переходит в режим ожидания.

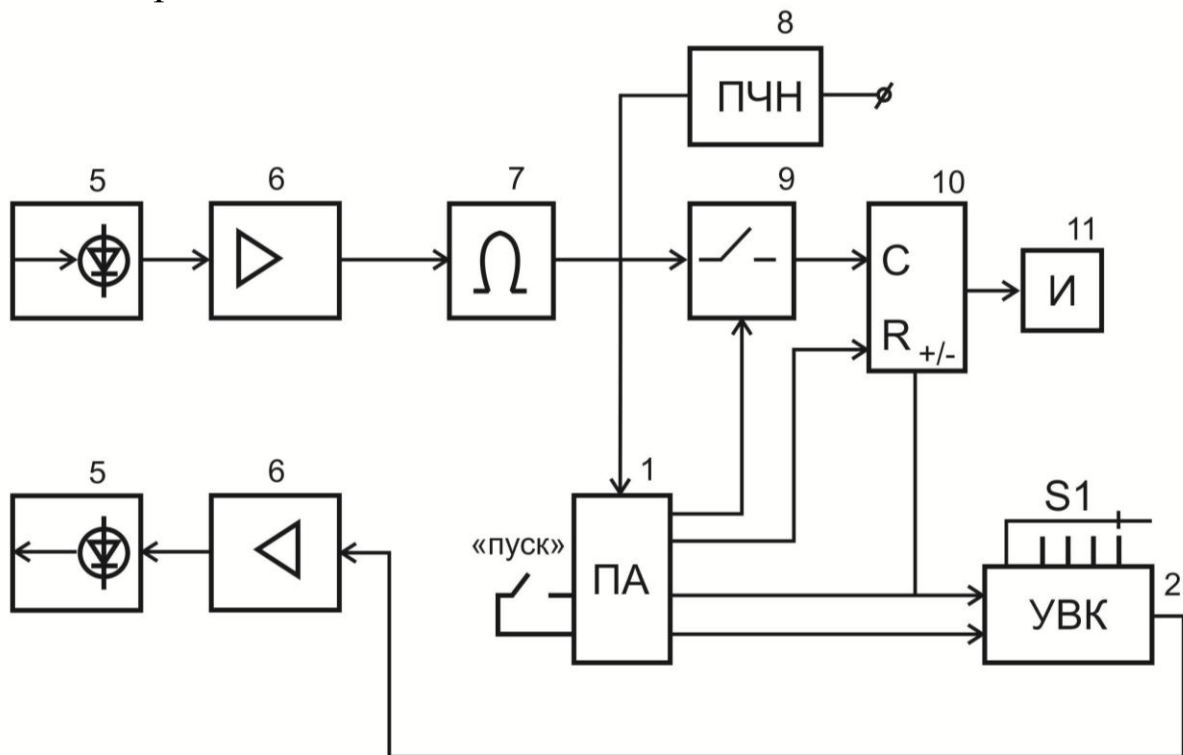


Рис. 10. Блок-схема прибора.

Устройство управления и регистрации (рис.10) предназначено для формирования команд управления и для дешифрации сигналов, поступающих с измерительного блока. В состав устройства управления и регистрации входят: программный автомат 1, устройство выбора канала 2, импульсный усилитель 3, излучающий диод 4, приемник излучения 5, усилитель 6, формирователь импульсов 7, преобразователь частоты в напряжение 8, управляемый вентиль 9, трехдекадный реверсивный счетчик 10, устройство индикации 11.

Функционирование устройства управления и регистрации происходит следующим образом. При нажатии кнопки «Пуск» приводится в действие программный автомат 1, который координирует



работу всех остальных узлов устройства управления и регистрации. Сразу после пуска программный автомат осуществляет предварительную установку реверсивного счетчика 10, затем приводит в действие устройство выбора канала 2, формирующее пакет импульсов, количество которых соответствует номеру опрашиваемого канала и задается положением переключателя S1. Эти импульсы поступают на усилитель 3, а затем на излучатель 4. Излучаемый сигнал, как уже указывалось, инициирует работу выносного измерительного блока, в результате чего на приемник 5 начинают поступать импульсы, передаваемые выносным блоком. Эти импульсы преобразуются в электрические сигналы, усиливаются, нормируются по длительности и амплитуде и поступают:

а) на программный автомат 1, благодаря чему блокируется повторный запуск устройства до окончания измерительного цикла;

б) на преобразователь частот 8, на выходе которого выделяется сигнал, идентичный тому, который имеется на входе ГУН измерительного блока, то есть усиленный сигнал дисбаланса. Параметры этого сигнала можно исследовать, подключив осциллограф к выходу преобразователя 8.

в) на управляемый ключ 9.

По истечении 0.5 секунд с момента пуска программный автомат выдает импульс калиброванной длительности 200 мс, который открывает ключ 9 и разрешает прохождение импульсов формирователя 7 на реверсивный счетчик 10, работающий в режиме суммирования. На этом заканчивается первая часть измерительного цикла.

Вторая часть измерительного цикла начинается с момента отключения выносного измерительного блока. При этом прекращается поступление импульсов с формирователя 7. Программный автомат реагирует на это повторным запуском, но в отличие от первого этапа формирует на линии «знак» высокий логический уровень, благодаря чему реверсивный счетчик 10 переводится в режим вычитания, а устройство выбора каналов 2 формирует код, соответствующий номеру канала, зарезервированного за опорным сигналом. Тем самым вновь инициируется включение выносного измерительного блока, но теперь уже в режиме формирования опорного сигнала, получаемого при подключении к тензоусилителю эталонных резисторов  $R_э$ . В результате этого к концу цикла измерения на счетчике 10 будет зафиксирована разность отсчетов опрашиваемого и опорного каналов. Результат счета выдается на трехдекадный цифровой индикатор 10.

Благодаря такому способу измерения практически полностью компенсируется нестабильность работы элементов выносного

измерительного блока, которая может быть связана с изменениями температуры, напряжения питания или с механическими перегрузками.

Конструктивно прибор выполнен в виде трех блоков: выносного измерительного блока, блока управления и регистрации, оптического модуля. В оптическом модуле расположены фотоприемник 5 и излучатель 4, а также входной и выходной усилители 3 и 6 (рис. 10). Оптический модуль связан с блоком управления и регистрации гибким кабелем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дайчик М.Л. и др. Методы и средства натурной тензометрии – М.: Машиностроение, 1989 – 240 с.
2. Экспериментальная механика: В 2-х книгах: Книга 1. Пер. с англ./ Под ред. А. Кобаяси – М. Мир. 1990 – 615 с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки – М.: Гостехиздат, 1956.
4. Биргер И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение. 1979 – 702 с.