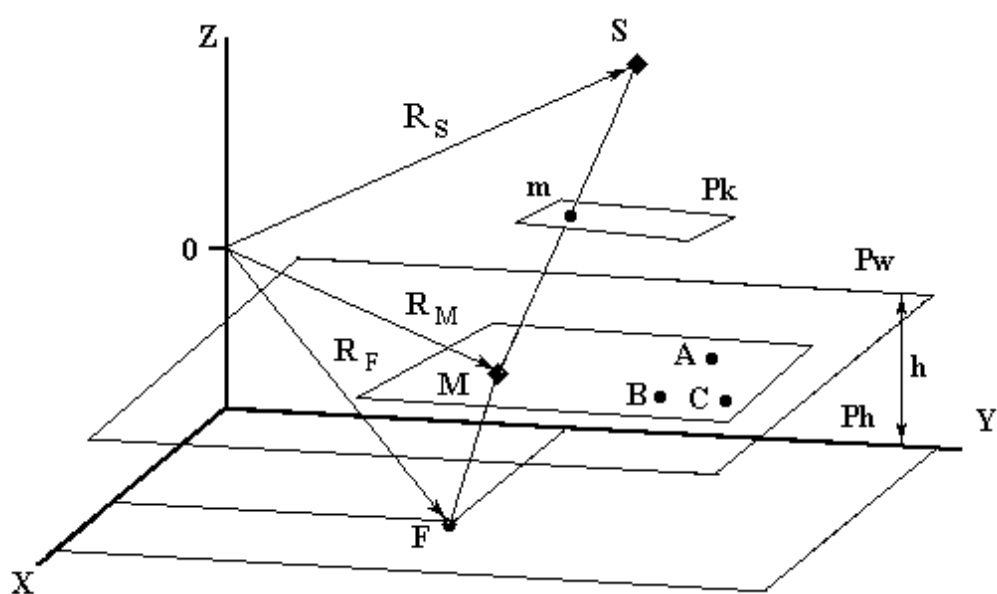


В. П. Шевчук, В. И. Капля,
А. П. Желтоногов, Д. Н. Лясин

МЕТРОЛОГИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. П. Шевчук, В. И. Капля,
А. П. Желтоногов, Д. Н. Лясин

МЕТРОЛОГИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ



Федеральное агентство по образованию
Волгоградский государственный технический университет
Волжский политехнический институт (филиал)

В. П. Шевчук, В. И. Капля, А. П. Желтоногов, Д. Н. Лясин

Метрология интеллектуальных измерительных систем

РПК «Политехник»

Волгоград

2005

Научное издание
Валерий Петрович Шевчук
Виктор Иванович Капля
Анатолий Павлович Желтоногов
Дмитрий Николаевич Лясин
(под общей редакцией академика метрологической академии России,
профессора В.П. Шевчука)

Метрология интеллектуальных измерительных систем

Монография

Редактор Е. М. Марносова
Темплан 2005г., поз.№ 44

Лицензия ИД №04790 от 18.05.2001.

Подписано в печать 20.11.05.

Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Печать офсетная. Усл.печ.л. 14,1.

Уч. – изд.л. 14,6 Тираж 200 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет
400131, Волгоград, пр. им. В. И. Ленина,28.

РПК «Политехник» Волгоградского государственного технического
университета

400 131, Волгоград, ул. Советская, 35.

Р е ц е н з е н т ы:

Академик метрологической академии России, заведующий кафедрой
“Радиотехнические устройства” Самарского ГТУ, профессор В. Н. Нестеров.

Академик метрологической академии России, профессор Ю. П. Муха.

Академик метрологической академии России, профессор А. Н. Шилин

Шевчук В. П., Капля В. И., Желтоногов А. П., Лясин Д. Н. (под общей редакцией академика метрологической академии России, профессора Шевчука В.П.).

Метрология интеллектуальных измерительных систем: Монография / ВолгГТУ, Волгоград, 2005. - 210 с.

ISBN 5 – 230 – 04616 - 3

Монография предназначена для инженеров и аспирантов, занимающихся изучением метрологических свойств информационно - измерительных систем, функционирующих в составе крупных управляющих комплексов и предназначенных для косвенных измерений обобщенных показателей технологических процессов и крупномасштабного оборудования. Рекомендуются также для использования в учебном процессе по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация» при подготовке дипломированных специалистов по направлению 657900- «Автоматизированные технологии и производства».

Ил. 69, табл. 14, Библиогр. - 44 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета.

ISBN 5 – 230 – 04616 - 3

© Авторы: Шевчук В. П., Капля В. И.,
Желтоногов А. П., Лясин Д. Н.

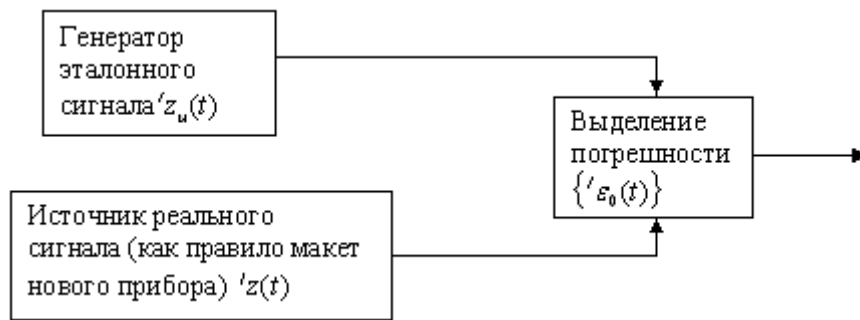
© Волгоградский государственный
технический университет, 2005

Введение

Измерение обобщенных показателей, таких, как коэффициент полезного действия (КПД), степень насыщения, себестоимость и множество других выполняется расчетным путем с помощью современных средств вычислительной техники по прямым измерениям множества физических величин. Измерительная информационная система - это совокупность средств измерений (мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и пр.) и вспомогательных устройств (ЭВМ, АЦП и др.), соединенных между собой каналами связи и объединенных пакетом прикладных программ (ППП) в единую управляющую систему. Наличие в измерительной системе вычислительной техники делает возможным не только хранение информации, но и применение алгоритмов идентификации, теории искусственного интеллекта, адаптации, а также алгоритмов обучения и организации структуры измерительной системы для обработки прямых измерений. Всё это придает процессу измерения признаки интеллектуальной измерительной системы, **основной особенностью которых** является **косвенное измерение обобщенного параметра** (себестоимость, КПД, количество тепла, степень насыщения и т.д.) по результатам прямых и косвенных измерений отдельных технологических параметров. Современные информационно-измерительные системы, наряду с классическими схемами обработки информации, такими, как **аналоговая обработка** информации, при которой весь процесс измерения производится с помощью аналоговых приборов, или **цифровая обработка** информации, которая имеет полностью цифровой тракт измерения, используют гибридные схемы обработки информации. Такие схемы обработки измерительной информации определяют класс интеллектуальных измерительных систем, метрология

которых и рассматривается в настоящей работе. Под гибридными (комбинированными или аналого-цифровыми) схемами обработки информации следует понимать информационно-измерительные системы, в которых используется как аналоговая, так и дискретная формы представления данных. Аналоговые методы обработки информации связаны с различными преобразованиями непрерывного измеряемого сигнала в удобный для дальнейшей обработки вид. Цифровые методы обработки информации основаны на арифметических и логических операциях над кодами (дискретными величинами) и более качественно выполняют динамические операции фильтрации, динамической компенсации, расчётов обобщенных технико-экономических показателей. Учитывая масштабы развития классической теории оптимальной фильтрации для случайных процессов, рассматривающих, в основном, задачи в чисто непрерывном варианте, а также учитывая масштабы развития теории цифровой фильтрации, рассматривающей задачи в чисто цифровом варианте, становится очевидным [2,7] необходимость разработки методов расчета для смешанных непрерывно-дискретных, дискретно-непрерывных и непрерывно-дискретно-непрерывных структур, соответствующих интеллектуальным информационно-измерительным каналам и системам на их основе. При этом особое место отводится характеристикам точности измерительных систем.

Если обсуждать вопросы количественной оценки погрешностей в аналоговых каналах обработки информации, то конечно же, следует обратиться к трудам Розенберга [11], которые являются определяющими при разработке измерительных приборов и где в качестве основной схемы выделения погрешности) принята разомкнутая схема сравнения результатов измерения с эталоном. Такая схема приведена на следующем далее рисунке и содержит генератор эталонного и источник реального сигналов.

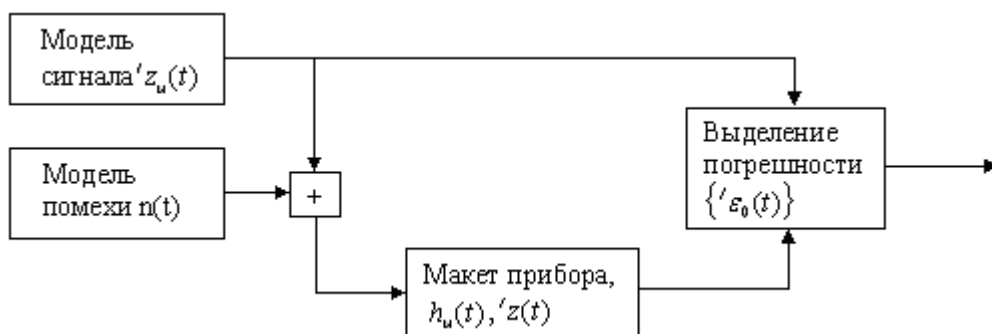


Фактический эффект воздействия реального информационного аналогового канала на исходный непрерывный процесс естественно рассматривать по отношению к результату применения желаемого эталонного аналогового сигнала. При этом случайная функция ошибки может быть представлена в виде

$${}^i \varepsilon_0(t) = {}^i z(t) - {}^i z_u(t),$$

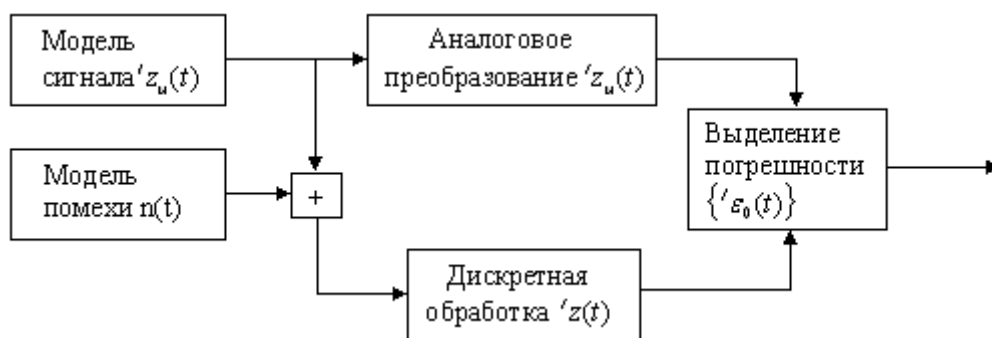
где ${}^i z(t)$ и ${}^i z_u(t)$ – частные реализации выходного сигнала реального и эталонного каналов.

Развитие методов имитационного моделирования привело к замкнутой схеме выделения погрешностей, в которой [2,7,18], как правило, дорогостоящий генератор эталонного сигнала меняется на математическую или физическую модель эталонного сигнала. Такая схема приведена на следующем рисунке.



Замкнутая схема выделения погрешности произвела целую революцию в приемах и методах проектирования приборов как аналоговых, так и

цифровых. Впервые для проектирования цифровых приборов её применил Винер. В работах [2,7,18] эта схема модернизирована и применена для количественной оценки погрешностей дискретного представления информации в АСУ ТП. Схема дискретной измерительной системы приведена на следующем рисунке.



Одной из центральных задач при проектировании интеллектуальных измерительных каналов в целом является количественное описание не столько свойств дискретной обработки информации, сколько свойств процессов дискретной передачи и обработки информации в измерительном канале [7] и получение соответствующих метрологических характеристик, связывающих эти свойства с определяющими факторами процесса формирования погрешностей обработки информации [9]. Подобные зависимости являются основным инструментом для принципиальных и практических задач, возникающих при создании и эксплуатации систем. Применительно к большинству этих задач показателем эффективности реализуемых информационной подсистемой функций является результирующая точность выполнения ею операций передачи и обработки данных.

В данной работе представлены материалы исследований различных вариантов реализации интеллектуальных измерительных каналов и систем.

Во второй и третьей главах [8,20,21,22] обсуждаются вопросы

математического описания процессов формирования погрешностей в одноканальных информационно-измерительных системах. Сложность задачи анализа функционирования программно-аппаратного измерительного канала при этом обусловлена невозможностью приведения ее к исследованию только одного "сквозного" линейного оператора всего измерительного канала. В общем случае реакция программно-аппаратного измерительного канала на стационарное входное воздействие является нестационарным процессом. Стационарной является случайная последовательность, представляющая собой совокупность значений центрированного выходного сигнала канала в моменты времени, кратные периоду дискретизации. Случайная функция погрешности, представляющая собой разность истинного значения искомой величины и ее оценки на выходе программно-аппаратного измерительного канала, является нестационарным процессом. Однако, как и в случае с выходным сигналом программно-аппаратного измерительного канала, стационарной является случайная последовательность, представляющая собой совокупность значений центрированной функции погрешности в моменты времени, кратные периоду дискретизации. Вследствие того, что среднеквадратическая погрешность зависит от значения параметра, изменяющегося в диапазоне от нуля до единицы, точность получаемых оценок зависит от момента времени внутри интервала дискретизации. Математические модели погрешности цифровой обработки измерительной информации при этом все равно могут быть использованы в качестве критериев качества при параметрическом синтезе программно-аппаратных измерительных каналов и оптимизации интеллектуальных измерительных каналов в условиях, когда характеристики помехи неизвестны, а за верхнюю оценку можно принять аппроксимацию ее свойств сигналом типа "белый шум". При этом точность цифровой

обработки измерительной информации в измерительном канале от периода опроса первичного преобразователя не носит экстремального характера. Это означает, что значение периода опроса не может быть определено в результате поиска минимума функции погрешности. Его следует выбирать как можно большим при условии достижения заданной точности цифровой обработки. С другой стороны, точность результатов измерений от постоянной времени динамического оператора имеет ярко выраженный минимум, и, следовательно, значения параметров канала могут быть найдены в результате поиска минимума функции погрешности.

В четвертой и пятой главах [9,26,27] обсуждаются вопросы математического описания процессов формирования погрешностей многоканальных информационно-измерительных систем, каналы в которых связаны мультипликативно (операцией умножения). Такие измерительные системы относятся к классу нелинейных систем и исследуются путем линеаризации разложением в ряд Тейлора функции, реализуемой системой, с сохранением в разложении лишь членов первого порядка. Погрешность линеаризации, при этом, убывает с уменьшением дисперсий измеряемых сигналов, в связи с чем рекомендуется использовать разработанные модели и методики при небольших колебаниях сигналов относительно математического ожидания. Характеристики точности в мультипликативных системах обработки информации так же зависят от периода опроса датчика в системе. Наличие плато в области, близкой к нулю (т.е. в области малых периодов опроса) приводит к тому, что погрешность обработки информации практически не зависит от уменьшения периода опроса, поэтому оптимальным периодом может являться максимальный период опроса датчиков, что позволяет разгрузить вычислительные мощности ИИС. В связи с тем, что каждый канал ИИС испытывает воздействие собственных

помех, существуют оптимальные параметры для каждого из цифровых фильтров, входящих в структуру измерительных каналов как входных, так и выходных параметров объекта управления. При этом, на погрешность обработки информации в измерительной системе существенно влияют динамические свойства объекта управления (погрешность тем больше, чем больше временное рассогласование сигналов, измеряемых в разных точках объекта управления).

Определённый интерес у читателя вызовет материал, посвященный телевизионным измерениям. При телевизионном измерении диаметра резино-технических изделий типа манжет и колец (гл. 6) исследовано [38] влияние на метрологические характеристики ИИС таких факторов, как яркость и контрастность изображения, размеры ПЗС матрицы, алгоритмы измерения по периметру и площади кольца. При этом доказано, что приведенная погрешность в основном зависит от метода измерения.

Информационно-измерительной системе бесконтактного мониторинга живой рыбы посвящается седьмая глава, в которой исследуются метрологические характеристики системы при измерении геометрических размеров и веса живой рыбы, находящейся в бассейне. Представлены результаты экспериментов [39,40] по влиянию на методическую погрешность измерения таких факторов, как глубина погружения рыбы, прозрачность воды, коэффициент преломления и др. При этом показано, что основной составляющей погрешности измерения является погрешность вычисления опорных координат местоположения рыбы.

Особый интерес вызывает прочтение восьмой главы, в которой представлен материал по изучению новых принципов измерения на основе применения нейронных сетей. Здесь каждый пиксель ПЗС матрицы

представляет собой поток информации в нейронную сеть, которая обучается в соответствии с алгоритмом измерения.

Монография имеет не только научную ценность. Она также может быть использована в учебном процессе как аспирантов по специальности 05.11.16 – «Информационно-измерительные и управляющие системы», так и студентов специальности 220301-«Автоматизация технологических процессов и производств», при изучении дисциплин «Метрология, стандартизация и сертификация», «Моделирование систем управления», «Проектирование систем управления».

Академик метрологической академии России,
профессор В.П.Шевчук.

Г Л А В А 1

ОСОБЕННОСТИ МЕТРОЛОГИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Основные задачи метрологии (ГОСТ 8.417-82) – установление единиц физических величин, государственных эталонов и образцовых средств измерений, разработка теории, методов и средств измерений и контроля, обеспечение единства измерений и единообразных средств измерений, разработка методов оценки погрешностей, состояния средств измерения и контроля, а также передачи размеров единиц от эталонов или образцовых средств измерений рабочим средствам измерений.

Измерение физической величины выполняют опытным путём с помощью технических средств. При измерениях используют разнообразные методы (ГОСТ 8.563-96), представляющие собой совокупность приемов использования различных физических принципов и средств. При прямых измерениях значения физической величины находят из опытных данных, при косвенных – на основании известной зависимости от величин, подвергаемых прямым измерениям. Уже при косвенных измерениях физических величин мы сталкиваемся с одной из важнейших составляющих абсолютной погрешности - методической погрешностью, которая, как правило, представляет собой погрешность аппроксимации по методу наименьших квадратов [1]. Для получения прямых измерений используют разнообразные методы (ГОСТ 8.563-96), представляющие собой совокупность приемов использования различных физических принципов и средств.

Абсолютные измерения основаны на прямых измерениях основных величин и использовании значений физических констант. При **относительных измерениях** величину сравнивают с одноимённой, играющей роль единицы или принятой за исходную.

При **методе непосредственной оценки** значение физической величины определяют непосредственно по отсчётному устройству прибора прямого действия, при **методе сравнения** с мерой измеряемую величину сравнивают с мерой.

При **дифференциальном методе** измеряемую величину сравнивают с известной величиной, воспроизводимой мерой. При **методе совпадений** разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, определяют, используя совпадения отметок шкал или периодических сигналов. **Поэлементный метод** характеризуется измерением каждого параметра изделия в отдельности. **Комплексный метод** характеризуется измерением суммарного показателя качества, на который оказывают влияние отдельные его составляющие.

Как и в классической метрологии в интеллектуальных измерительных системах *измерение* – информационный процесс получения опытным путем численного соотношения между данной физической величиной и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.

Результат измерения – именованное число, найденное путем измерения физической величины. (Результат измерения может быть принят за действительное значение измеряемой величины).

Погрешность измерения – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. (Погрешность измерения характеризует точность измерения).

Точность измерения – степень близости результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

Измерительный эксперимент – научно обоснованный опыт для получения количественной информации с требуемой или возможной точностью определения результата измерений.

Средство измерений – техническое устройство, используемое в измерительном эксперименте и имеющее нормированные характеристики точности.

Контроль – процесс установления соответствия между состоянием объекта контроля или его свойством и заданной нормой.

Мера – средство измерений, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера.

Измерительный прибор – средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем.

Измерительный преобразователь – средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для дальнейшего преобразования, обработки и хранения, но не поддающегося непосредственному восприятию наблюдателем.

Измерительная информационная система – совокупность средств измерений (мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и пр.) и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи и предназначенных для получения измерительной информации, доступной для наблюдения, обработки и управления объектами.

Как и в классической метрологии интеллектуальным измерительным системам свойственны все типы погрешностей, определяемые **классификацией погрешностей.**

Доказано, что изменение погрешности во времени представляет собой нестационарный случайный процесс. Разделение погрешности на **систематическую, прогрессирующую и случайную составляющие** представляет собой попытку описать различные участки частотного спектра этого широкополосного процесса: инфранизкочастотный, низкочастотный и высокочастотный.

Случайная погрешность — составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений одного и того же размера ФВ, проведенных с одинаковой тщательностью в одних и тех же условиях. В появлении таких погрешностей (рис.1.1) не наблюдается какой-либо закономерности, они обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Случайные погрешности неизбежны, неустранимы и всегда присутствуют в результате измерения. Описание случайных погрешностей возможно только на основе теории случайных процессов и математической статистики. [16]

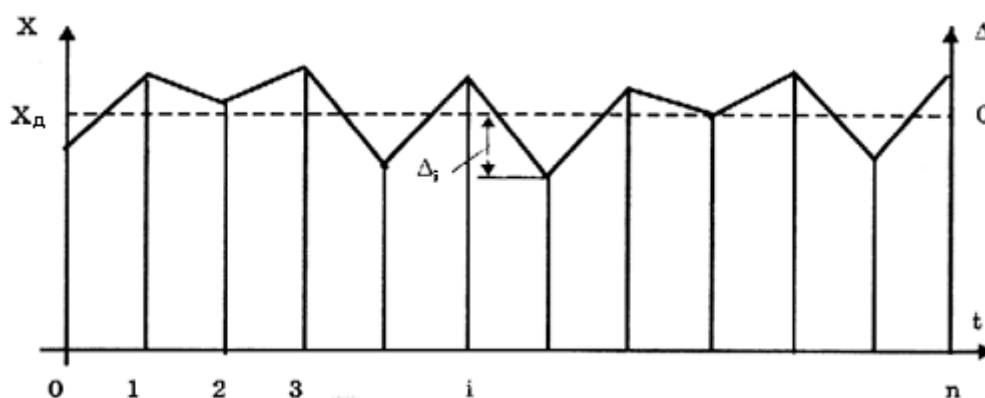


Рис. 1. 1

В отличие от систематических случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений путем введения поправки, однако их можно существенно уменьшить путем увеличения числа наблюдений. Поэтому для получения результата, минимально отличающегося от истинного значения измеряемой величины, проводят многократные измерения требуемой величины с последующей математической обработкой экспериментальных данных.

Большое значение имеет изучение случайной погрешности как функции номера наблюдения i или соответствующего ему момента времени t_i

проведения измерений, т.е. $\Delta_i = \Delta(t_i)$. Отдельные значения погрешности являются значениями функции $\Delta(t)$, следовательно, погрешность измерения есть случайная функция времени. При проведении многократных измерений получается одна реализация такой функции. Именно такая реализация показана на рис. 1.1. Повтор серии измерений даст нам другую реализацию этой функции, отличающуюся от первой, и т. д. Погрешность, соответствующая каждому i -му измерению, является сечением случайной функции $\Delta(t)$. В каждом сечении данной функции можно найти среднее значение, вокруг которого группируются погрешности в различных реализациях. Если через полученные таким образом средние значения провести плавную кривую, то она будет характеризовать общую тенденцию изменения погрешности во времени.

Систематическая погрешность — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же ФВ. Их отличительный признак заключается в том, что они могут быть предсказаны, обнаружены и благодаря этому почти полностью устранены введением соответствующей поправки.

По *способу выражения* различают **абсолютную, относительную и приведенную погрешности.**

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины. Однако она не может в полной мере служить показателем точности измерений, так как одно и то же ее значение, например, $\Delta=0,05$ мм при $X = 100$ мм соответствует достаточно высокой точности измерений, а при $X = 1$ мм — низкой. Поэтому и вводится понятие относительной погрешности.

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{Q} = \frac{(X - Q)}{Q}. \quad (1.1)$$

Эта наглядная характеристика точности результата измерения не годится для нормирования погрешности СИ, так как при изменении значений Q принимает различные значения вплоть до бесконечности при $Q = 0$. В связи с этим для указания и нормирования погрешности СИ используется еще одна разновидность погрешности — приведенная.

Приведенная погрешность — это относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерения отнесена к условно принятому значению Q_N , постоянному во всем диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \frac{\gamma}{Q_N} = \frac{(X - Q)}{Q_N}. \quad (1.2)$$

Условно принятое значение Q_N называют *нормирующим*. Чаще всего за него принимают верхний предел измерений данного средства измерения, применительно к которым и используется, главным образом, понятие "приведенная погрешность".

В зависимости от *места возникновения* различают **инструментальные, методические и субъективные погрешности**.

Инструментальная погрешность обусловлена погрешностью применяемого средства измерения.

Методическая погрешность измерения обусловлена:

- отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путем измерения;
- влиянием алгоритмов (формул), по которым производятся вычисления результатов измерений.

Отличительной особенностью интеллектуальных измерительных систем является то, что методическая погрешность в них выдвигается на передний

план за счет расширения вызывающих её факторов. К таким факторам относятся погрешности: дискретизации, идентификации, расчета по конкретному методу и т.д. Оценивание методических погрешностей производится с целью получения объективных данных о точности результата измерения. Погрешность измерения описывается определенной математической моделью, выбор которой обуславливается имеющимися априорными сведениями об источниках погрешности, а также данными, полученными в ходе измерений. С помощью выбранной модели определяются характеристики и параметры погрешности, используемые для количественного выражения тех или иных ее свойств.

В основу выбора оценок погрешностей положен ряд принципов. Во-первых, оцениваются отдельные характеристики и параметры выбранной модели погрешности. Это связано с тем, что модели погрешностей, как правило, сложны и описываются многими параметрами. Определение их всех весьма затруднительно, а иногда и невозможно. Кроме этого, в большинстве практических случаев полное описание модели погрешности содержит избыточную информацию, в то время как знание отдельных ее характеристик вполне достаточно для достижения цели измерения. Во-вторых, оценки погрешности определяют приближенно, с точностью, согласованной с целью измерения. Это обусловлено тем, что погрешности определяют лишь зону неопределенности результата измерения и их не требуется знать очень точно. В-третьих, погрешности оцениваются сверху, поэтому погрешность лучше преувеличить, чем преуменьшить, так как в первом случае снижается качество измерений, а во втором — возможно полное обесценивание результатов всего измерения. В-четвертых, поскольку стремятся получить реалистические значения оценки погрешности результата измерения, т.е. не слишком завышенные и не слишком заниженные, точность измерений должна соответствовать цели измерения. Излишняя точность ведет к неоправданному расходу средств и времени. По

этой причине, в последние годы, при оценке методической погрешности прибегают к понятию **уравнение измерения** [2], которое, в конечном итоге, является математической моделью измерительного канала в интеллектуальной измерительной системе и может характеризовать как **статическую**, так и **динамическую погрешность** процесса измерения и является основной систематической составляющей погрешности интеллектуальной измерительной системы в целом.

1.1. Критерии оценки наличия систематических погрешностей

Систематическая погрешность считается специфической, "вырожденной" случайной величиной, обладающей некоторыми, но не всеми свойствами случайной величины, изучаемой в теории вероятностей и математической статистике. Свойства систематической погрешности, которые необходимо учитывать при объединении составляющих погрешности, отражаются такими же характеристиками, что и свойства "настоящих" случайных величин — дисперсией (СКО) [17] и коэффициентом взаимной корреляции.

Систематическая погрешность представляет собой определенную функцию влияющих факторов, состав которых зависит от физических, конструктивных и технологических особенностей системы, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя. В метрологической практике при оценке систематических погрешностей должно учитываться влияние следующих основных факторов:

1. **Объект измерения.** Перед измерением он должен быть достаточно хорошо изучен с целью корректного выбора его модели. Чем полнее модель соответствует исследуемому объекту, тем точнее могут быть получены результаты измерения.

2. **Условия субъекта измерения.** Его вклад в погрешность измерения

необходимо уменьшать путем подбора операторов высокой квалификации и соблюдения требований эргономики при разработке системы измерения.

3. Метод и средство измерений. Чрезвычайно важен их правильный выбор, который производится на основе априорной информации об объекте измерения. Обеспечение и стабилизация нормальных условий являются необходимыми требованиями для минимизации дополнительной погрешности, которая по своей природе, как правило, является систематической.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей в данном случае является дисперсионный критерий Фишера [16] $F = \sigma_{mc}^2 / \sigma_{bc}^2$. Критическая область для критерия Фишера соответствует $P(F > F_q) = q$.

Значения F_q для различных уровней значимости q , числа измерений N и числа серий s приведены в приложении 1, где $k_2 = N - s$, $k_1 = s - 1$. Если полученное значение критерия Фишера больше F_q (при заданных q , N и s), то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов наблюдений по сериям отвергается, т.е. обнаруживается систематическая погрешность, вызываемая тем фактором, по которому группировались результаты наблюдений.

Например, было сделано 38 измерений диаметра детали восьмью различными штангенциркулями. Каждым из них проводились по пять измерений. Внутрисерийная дисперсия равна $0,054 \text{ мм}^2$, межсерийная — $0,2052 \text{ мм}^2$. Определить наличие систематической погрешности измерения диаметра детали.

Расчетное значение критерия Фишера $F = 0,2052 / 0,054 = 3,8$. Для $s - 1 = 7$, $N - s = 30$ имеем при $q = 0,05$ $F_{0,05} = 2,3$ и при $q = 0,01$ $F_{0,01} = 3,3$. Полученное значение F больше, чем 2,2 и 2,9. Следовательно, в результате наблюдений обнаруживается наличие систематических погрешностей. [14]

Из всех рассмотренных способов обнаружения систематических погрешностей дисперсионный анализ является наиболее эффективным и достоверным, так как позволяет не только установить факт наличия погрешности, но и дает возможность проанализировать источники ее возникновения.

Критерий Вилкоксона. Если закон распределения результатов измерений неизвестен, то для обнаружения систематической погрешности применяют статистический критерий Вилкоксона [16].

Из двух групп результатов измерений x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m , где $n \geq m \geq 5$, составляется вариационный ряд, в котором все $n+m$ значений $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ располагают в порядке их возрастания и приписывают им ранги — порядковые номера членов вариационного ряда. Различие средних значений каждого из рядов можно считать допустимым, если выполняется неравенство:

$$T_q^- < \sum_{i=1}^n R_i < T_q^+,$$

где R_i — ранг (номер) члена x_i , равный его номеру в вариационном ряду; T_q^- и T_q^+ — нижнее и верхнее критические значения для выбранного уровня значимости q . При $m < 15$ эти критические значения определяются по табл.

1.1. При $m > 15$ они рассчитываются по формулам:

$$T_q^- = \frac{n(n+m+1)}{2} - z_p \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}},$$

$$T_q^+ = \frac{n(n+m+1)}{2} + z_p \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}},$$

где z_p — квантиль нормированной функции Лапласа.

Более полная таблица значений критических значений T_q^- и T_q^+ приведена в рекомендации МИ 2091-90 "ГСИ. Измерения физических величин. Общие требования".

Таблица 1.1

Критические значения T_q^- и T_q^+ при $q=0,05$ и $0,01$

n	m	q = 0,05		q = 0,01	
		T_q^-	T_q^+	T_q^-	T_q^+
8	8	49	87	43	93
	10	53	99	47	105
	15	65	127	56	136
9	9	62	109	56	115
	15	79	146	69	156
10	10	78	132	71	139
	15	94	166	84	176
12	12	115	185	105	195
	15	127	209	115	221
14	14	160	246	147	259
	15	164	256	151	268
15	15	184	282	171	294

В ряде случаев систематические погрешности могут быть вычислены и исключены из результата измерения путем введения поправок. Для этого используются поправки. *Поправка C_j* — величина, одноименная измеряемой, которая вводится в результат измерения $x_i = x_i' + \theta_j + C_j$ с целью исключения составляющих систематической погрешности θ_j . При $C_j = -\theta_j$ j -я составляющая систематической погрешности полностью устраняется из результата измерения. Поправки определяются экспериментально или в результате специальных теоретических исследований. Они задаются в виде таблиц, графиков или формул. Введением одной поправки устраняется влияние только одной составляющей систематической погрешности. Для устранения всех составляющих в результат измерения приходится вводить множество поправок. При этом вследствие ограниченной точности определения поправок случайные погрешности результата измерения накапливаются и его дисперсия увеличивается. Так как поправка известна с определенной точностью, то она характеризуется статистически — средним значением

поправки C и СКО S_c . При исправлении результата x_i' путем введения поправок C_j , где $j=1, 2, \dots, m$, по формуле:

$$x_i = x_i' + \sum_{j=1}^m C_j,$$

дисперсия исправленного результата примет вид:

$$S^2 = S_n^2 + \sum_j S_{cj}^2,$$

где S_n^2 — оценка дисперсии неисправленного результата; S_{cj}^2 — оценка дисперсии j -й поправки. Как видно, с одной стороны, уточняется результат измерения, а с другой — увеличивается разброс за счет роста дисперсии. Следовательно, необходимо найти оптимум.

Пусть при измерении постоянной величины Q получено (рис.1.1) значение $Q = \bar{x}' \pm t_p S$, где \bar{x}' — оценка среднего арифметического неисправленного результата измерений; t_p — коэффициент Стьюдента.

После введения поправки $C \pm t_p S_c$ результат измерения примет вид:

$$Q = (\bar{x}' + C) \pm t_p S_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t_p S_{\bar{x}},$$

где $S_{\bar{x}} = \sqrt{S^2 + S_c^2}$.

Максимальные доверительные значения погрешности результата измерения до и после введения поправки равны соответственно:

$$\Delta_1 = \theta_1 + t_p S, \Delta_2 = \theta_2 + t_p S_{\bar{x}} = \theta_1 - C + t_p \sqrt{S^2 + S_c^2}.$$

Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока $\Delta_1 < \Delta_2$. Отсюда следует, что справедливо неравенство:

$$C > t_p S \left[\sqrt{1 + S_c^2 / S^2} - 1 \right].$$

Если $S_c / S \ll 1$, то, раскладывая уравнение в степенной ряд, получим $C > 0,5 S_c^2 / S^2$. Из этого неравенства видно, что если оценка среднего

квадратического отклонения поправки $S_c \rightarrow 0$, то поправку имеет смысл вводить всегда.

В практических расчетах погрешность результата обычно выражается не более чем двумя значащими цифрами. Поэтому поправка, если она меньше пяти единиц младшего разряда, следующего за последним десятичным разрядом погрешности результата, все равно будет потеряна при округлении и вводить ее не имеет смысла.

Например, напряжение источника ЭДС U_x с внутренним сопротивлением $R_j = 60 \pm 10$ Ом измерено вольтметром класса точности 0,5. Сопротивление вольтметра $R_V = 5$ кОм и известно с погрешностью $\pm 0,5\%$. Показание вольтметра $U_V = 12,35$ В. Найти поправку, которую нужно внести в показание прибора для определения действительного значения напряжения источника ЭДС.

Показания вольтметра соответствуют падению напряжения и имеют вид:

$$U_V = \frac{R_V}{R_i + R_V} U_x.$$

Относительная систематическая методическая погрешность, обусловленная ограниченным значением сопротивления R_V :

$$\delta_c = \frac{U_V - U_x}{U_x} 100\% = -\frac{100R_i}{R_i + R_V} = -\frac{100 \cdot 60}{5060} = -1,2\%.$$

Поправка равна абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком: $\Delta_c = 0,012 \cdot 12,35 = 0,146$ В. Погрешность полученного значения поправки определяется погрешностью, с которой известно сопротивление R_i . Ее предельное значение составит $10/60 = 0,167$. Погрешностью из-за неточности оценки R_V , равной 0,005, можно пренебречь. Следовательно, погрешность определения поправки $\Delta = \pm 0,167 \cdot 0,146 \approx 0,03$ В.

Таким образом, поправка, которую необходимо ввести в показания вольтметра с учетом округления $\Delta U = +0,15$ В. Тогда исправленное значение $U'_x = 12,35 + 0,15 = 12,50$ В. Этот результат имеет определенную

погрешность, в том числе неисключенный остаток систематической погрешности $\Delta = \pm 0,03$ В или $\delta = \pm 0,24\%$ из-за потребления некоторой мощности вольтметром.

1.2. Математические модели и характеристики погрешностей

В общем случае результаты измерений и их погрешности должны рассматриваться как функции, изменяющиеся во времени случайным образом, т.е. случайные функции, или, как принято говорить в математике, случайные процессы. Поэтому математическое описание результатов и погрешностей измерений (т.е. их математические модели) должно строиться на основе теории случайных процессов. Без этого невозможно решение большого числа практических метрологических задач. Прежде чем перейти к рассмотрению математических моделей погрешностей измерений, кратко изложим основные моменты теории случайных функций.

Случайным процессом $X(t)$ называется процесс (функция), значение которого при любом фиксированном значении $t = t_0$ является случайной величиной $X(t_0)$. Конкретный вид процесса (функции), полученный в результате опыта, называется *реализацией*. При проведении серии опытов можно получить группу или семейство реализаций случайной функции (рис. 1.2). Семейство реализаций случайного процесса является основным экспериментальным материалом, на основе которого можно получить его характеристики и параметры.

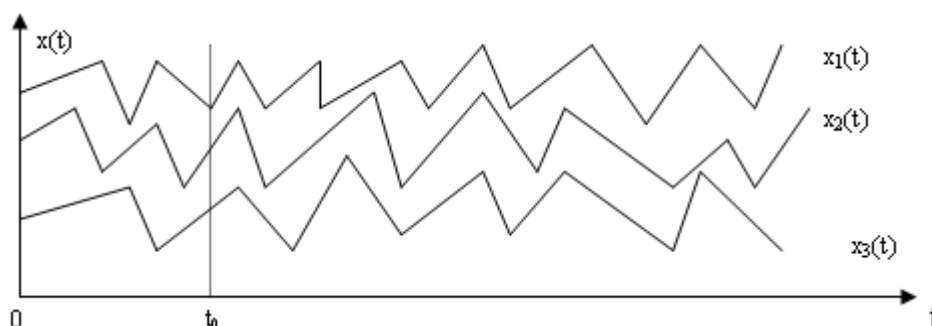


Рис.1.2

Каждая реализация является неслучайной функцией времени. Семейство реализаций при каком-либо фиксированном значении времени t_0 (см. рис. 1.3) представляет собой случайную величину, называемую *сечением случайной функции*, соответствующим моменту времени t_0 . Следовательно, случайная функция совмещает в себе характерные признаки случайной величины и детерминированной функции. При фиксированном значении аргумента она превращается в случайную величину, а в результате каждого отдельного опыта становится детерминированной функцией.

Наиболее полно случайные процессы описываются законами распределения: одномерным, двумерным и т.д. Однако оперировать с такими, в общем случае многомерными функциями очень сложно. Поэтому в инженерных приложениях, каковым является метрология, стараются обойтись характеристиками и параметрами этих законов, которые описывают случайные процессы не полностью, а частично. Характеристики случайных процессов, в отличие от характеристик случайных величин, являются не числами, а функциями. К важнейшим из них относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx,$$

которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения. Здесь $p(x,t)$ — одномерная плотность распределения случайной величины x в соответствующем сечении случайного процесса $X(t)$. Таким образом, математическое ожидание в данном случае является средней функцией, вокруг которой группируются конкретные реализации.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция

$$D_X(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t)]^2 p(x, t) dx,$$

значение которой для каждого момента времени равно дисперсии соответствующего сечения, т.е. дисперсия характеризует разброс реализаций относительно $m_X(t)$.

Математическое ожидание случайного процесса и его дисперсия являются весьма важными, но не исчерпывающими характеристиками, так как определяются только одномерным законом распределения. Они не могут характеризовать взаимосвязь между различными сечениями случайного процесса при различных значениях времени t и t' . Для этого используется *корреляционная функция* — неслучайная функция $R(t, t')$ двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений аргументов равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса:

$$R(t, t') = M\{[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')]\} = M[X(t)X(t')] - m_X(t)m_X(t').$$

Корреляционная функция, называемая иногда *автокорреляционной*, описывает статистическую связь между мгновенными значениями случайной функции, разделенными заданным значением времени $\tau = t' - t$. При равенстве аргументов корреляционная функция равна дисперсии случайного процесса. Она всегда неотрицательна.

На практике часто используется нормированная корреляционная функция

$$r(t, t') = R(t, t') / \sqrt{D_X(t)D_X(t')}.$$

Она обладает следующими свойствами: 1) при равенстве аргументов t и t' $r(t, t') = 1$; 2) симметрична относительно своих аргументов: $r(t, t') = r(t', t)$; 3) ее возможные значения лежат в диапазоне $[-1; 1]$, т.е. $|r(t, t')| < 1$. Нормированная корреляционная функция по смыслу аналогична коэффициенту корреляции между случайными величинами, но зависит от двух аргументов и не является постоянной величиной.

Случайные процессы, протекающие во времени однородно, частные реализации которых с постоянной амплитудой колеблются вокруг средней функции, называются *стационарными*. Количественно свойства стационарных процессов характеризуются следующими условиями.

- Математическое ожидание стационарного процесса постоянно, т.е. $m_x(t) = m_x = const$. Однако это требование не является существенным, поскольку от случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к центрированной функции, для которой математическое ожидание равно нулю. Отсюда вытекает, что если случайный процесс нестационарен только за счет переменного во времени (по сечениям) математического ожидания, то операцией центрирования его всегда можно свести к стационарному.

- Для стационарного случайного процесса дисперсия по сечениям является постоянной величиной, т.е. $D_x(t) = D_x = const$.

- Корреляционная функция стационарного процесса зависит не от значения аргументов t и t' , а только от промежутка $\tau = t' - t$, т.е. $R(t, t') = R(\tau)$. Предыдущее условие является частным случаем данного условия, т.е. $D_x(t) = R(t, t') = R(\tau = 0) = const$.

Таким образом, зависимость автокорреляционной функции только от интервала τ является единственным существенным условием стационарности случайного процесса.

Важной характеристикой стационарного случайного процесса является его спектральная плотность $S(\omega)$, которая описывает частотный состав случайного процесса при $\omega \geq 0$ и выражает среднюю мощность случайного процесса, приходящуюся на единицу полосы частот [14]:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Спектральная плотность стационарного случайного процесса является неотрицательной функцией частоты $S(\omega) \geq 0$. Площадь, заключенная под

кривой $S(\omega)$, пропорциональна дисперсии процесса. Корреляционная функция может быть выражена через спектральную плотность

$$R(\tau) = \int S(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Стационарные случайные процессы могут обладать или не обладать свойством эргодичности. Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если любая его реализация достаточной продолжительности является как бы "полномочным представителем" всей совокупности реализаций процесса. В таких процессах любая реализация рано или поздно пройдет через любое состояние независимо от того, в каком состоянии находился этот процесс в начальный момент времени.

Для эргодического стационарного случайного процесса его математическое ожидание может быть определено из выражения

$$m_x = M[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt.$$

Достаточным условием выполнения этого равенства — эргодичности стационарного случайного процесса $X(t)$ по математическому ожиданию — является выполнение условия $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$. Дисперсия эргодического процесса может быть найдена по формуле

$$D_X = D[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m_X)^2 dt.$$

Достаточным условием выполнения этого равенства — эргодичности стационарного процесса $X(t)$ по дисперсии — является $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0$, где $R_Y(\tau)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $Y(t) = [X(t)]$.

Корреляционная функция стационарного эргодического случайного процесса может быть определена по формуле

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t) - m_X][X(t - \tau) - m_X] dt.$$

Достаточным условием выполнения последнего равенства — эргодичности стационарного процесса $X(t)$ по корреляционной функции — является $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Z(\tau) = 0$, где $R_Z(\tau)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса $Z(t, \theta) = X(t) X(t + \theta)$.

При построении математической модели погрешности измерений следует учитывать всю информацию о проводимом измерении и его элементах. Модели для измерений, проводимых различными методами и средствами, могут существенно различаться.

В общем случае абсолютную погрешность измерения $\Delta(t)$ следует представлять в виде суммы нескольких составляющих:

$$\Delta(t) = \Delta_S(t) + \overset{\circ}{\Delta}_0(t) + \overset{\circ}{\Delta}_0 = \Delta_S(t) + \left[\overset{\circ}{\Delta}_{0s}(t) + \overset{\circ}{\Delta}_{0n}(t) \right] + \overset{\circ}{\Delta}_0.$$

Каждая из них может быть обусловлена действием нескольких различных источников погрешностей и в свою очередь состоять также из некоторого числа составляющих.

Систематическая составляющая $\Delta_S(t)$ представляет собой нестационарную случайную функцию, описывающую постоянную или инфранизкочастотную погрешность, причины возникновения которой могут быть различными. Периоды изменения составляющих систематической погрешности значительно больше времени, необходимого для проведения измерения. Поэтому погрешность $\Delta_S(t)$ условно принимается за постоянную, и для ее учета применяются математические методы, разработанные для неизменных во времени и от измерения к измерению погрешностей, значения которых неизвестны.

Составляющая $\overset{\circ}{\Delta}(t)$ является случайной и имеет широкий частотный спектр. Периоды изменения составляющих этой погрешности меньше или сравнимы со временем измерения. Она может быть разделена на две составляющие: $\overset{\circ}{\Delta}_{0в}(t)$ и $\overset{\circ}{\Delta}_{0н}(t)$, которые являются стационарными случайными функциями времени с различными частотными спектрами — высокочастотным и низкочастотным соответственно. Автокорреляционная функция высокочастотной составляющей погрешности затухает в течение времени, значительно меньшего времени измерения. Для низкочастотной составляющей автокорреляционная функция затухает до нуля в течение времени, большего времени отдельного измерения. Такое различие в поведении этих составляющих обуславливает их выделение и применение к ним различных методик обработки.

Составляющая $\overset{\circ}{\Delta}_0$ [17] является центрированной случайной величиной, не зависящей от времени, но изменяющейся от измерения к измерению. Величины $\overset{\circ}{\Delta}_{0в}(t)$ и $\overset{\circ}{\Delta}_0$ могут быть объединены в одну стационарную центрированную функцию $\overset{\circ}{\Delta}(t)$. Ее автокорреляционная функция затухает на интервале времени, который меньше времени проведения всего измерения, но существенно больше интервала времени, необходимого для одного измерения. В связи с этим математическая модель погрешности измерения может быть записана в виде:

$$\Delta(t) = \Delta_S(t) + \overset{\circ}{\Delta}_{0н}(t) + \overset{\circ}{\Delta}_0(t).$$

Отдельные составляющие этого уравнения могут отсутствовать при моделировании погрешности конкретного измерения. Так, зачастую нет необходимости учитывать высокочастотную составляющую погрешности измерения.

Эффективное использование рассмотренной модели погрешности измерения возможно только при известном частотном спектре ее составляющих. Однако данное условие весьма трудно выполнить на практике, и поэтому часто случайная погрешность измерения описывается не случайной функцией, а представляется еще в более упрощенном виде, а именно в виде случайной величины. При этом для описания погрешностей используются теория вероятностей и математическая статистика. Однако прежде необходимо сделать ряд существенных оговорок:

- применение методов математической статистики к обработке результатов измерений правомочно лишь в предположении о независимости между собой отдельных получаемых отсчетов;

- большинство используемых в метрологии формул теории вероятностей правомерны только для непрерывных распределений, в то время как распределения погрешностей вследствие неизбежного квантования отсчетов, строго говоря, всегда дискретны, т.е. погрешность может принимать лишь счетное множество значений.

Таким образом, условия непрерывности и независимости для результатов измерений и их погрешностей соблюдаются приближенно, а иногда и не соблюдаются. В математике под термином "непрерывная случайная величина" понимается существенно более узкое, ограниченное рядом условий понятие, чем "случайная погрешность" в метрологии.

С учетом этих ограничений процесс появления случайных погрешностей результатов измерений за вычетом систематических и прогрессирующих погрешностей обычно может рассматриваться как центрированный стационарный случайный процесс. Его описание возможно на основе теории статистически независимых случайных величин и стационарных случайных процессов.

При выполнении измерений требуется количественно оценить погрешность. Для такой оценки необходимо знать определенные характеристики и параметры модели погрешности. Их номенклатура зависит от вида модели и требований к оцениваемой погрешности. В метрологии принято различать три группы характеристик и параметров погрешностей. Первая группа — задаваемые в качестве требуемых или допускаемых нормы характеристик погрешности измерений (нормы погрешностей). Вторая группа характеристик — погрешности, приписываемые совокупности выполняемых по определенной методике измерений. Характеристики этих двух групп применяются в основном при массовых технических измерениях и представляют собой вероятностные характеристики погрешности измерений. Третья группа характеристик — статистические оценки погрешностей измерений отражают близость отдельного, экспериментально полученного результата измерения к истинному значению измеряемой величины. Они используются в случае измерений, проводимых при научных исследованиях и метрологических работах.

В качестве характеристик случайной погрешности используют статистическую корреляционную оценку (СКО) [17] случайной составляющей погрешности измерений и, если необходимо, ее нормализованную автокорреляционную функцию.

ОСОБЕННОСТИ МЕТРОЛОГИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ	14
1.1. Критерии оценки наличия систематических погрешностей	21
1.2. Математические модели и характеристики погрешностей	27

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОДНОКАНАЛЬНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Необходимость решения задачи параметрического синтеза измерительных каналов в автоматизированных системах управления технологическими процессами (АСУТП) требует разработки методов расчета методической погрешности цифровой обработки измерительной информации в программно-аппаратных измерительных каналах, что в свою очередь требует выбора математических моделей компонентов измерительных каналов, исследования свойств выходных сигналов измерительного канала (ИК) и разработки математических методов описания процессов формирования методической погрешности измерительных каналов в информационно-измерительных и управляющих системах.

2.1. Математические модели измерительных компонентов

Как уже было отмечено выше, основным режимом измерений в управляющих комплексах является установившийся динамический режим. Это обстоятельство является определяющим при выборе математических моделей компонентов измерительного канала не только в интеллектуальных системах, но и измерительных системах всех категорий и классов.

Измерительные преобразователи, в соответствии с видом осуществляемых в них преобразований, можно разделить на следующие группы [18]:

1) аналоговые функциональные преобразователи, осуществляющие преобразование аналоговой входной величины в аналоговую выходную величину ;

2) преобразователи формы сигнала, осуществляющие дискретизацию, квантование входной величины, а, в общем случае, аналого-цифровое преобразование аналоговой входной величины в цифровую выходную величину и обратное ему цифро-аналоговое преобразование;

3) цифровые преобразователи, осуществляющие преобразование входной цифровой величины в выходную цифровую величину.

В большинстве случаев к **аналоговым преобразователям** относятся датчики (первичные измерительные преобразователи), а также многочисленные устройства предварительной обработки сигналов (мосты, усилители, линии задержки, аналоговые фильтры, детекторы и т.д.).

Большинство аналоговых преобразователей представляют собой линейные динамические звенья. Как известно, оператором, характеризующим реакцию линейной динамической системы на реальное входное воздействие, является оператор свертки. Таким образом, в качестве математической модели аналогового преобразователя естественно использовать следующее выражение:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\nu)x(t - \nu)d\nu, \quad (2.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – входной и выходной сигналы преобразователя; $h(t)$ - весовая (импульсная переходная) функция преобразователя.

Если несколько линейных аналоговых преобразователей соединены между собой последовательно, то весовая функция эквивалентного звена равна свертке весовых функций преобразователей:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_n(t),$$

где * - символ операции свертки, n – количество преобразователей. Так эквивалентная весовая функция двух последовательно соединенных

линейных аналоговых преобразователей будет равна:

$$h(t) = \int_0^t h_1(v)h_2(t-v)dv, \quad (2.2)$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ – весовые функции соответственно первого и второго преобразователей.

В записи выражений (2.1) и (2.2) уже учтено, что весовая функция любого реального динамического объекта удовлетворяет условию

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0.$$

Наиболее распространенными видами **цифровых преобразователей** являются алгоритмические преобразователи, описывающие преобразования цифровых измерительных сигналов в ЭВМ и в других цифровых вычислительных устройствах: цифровых динамических преобразователях, цифровых фильтрах, конечных автоматах, различных преобразователях кодов. Отдельную группу таких устройств образуют масштабнo-временные цифровые преобразователи. Многие из перечисленных измерительных преобразователей представляют собой комбинацию элементарных преобразователей.

В качестве математической модели линейных цифровых преобразователей будет естественным, по аналогии с аналоговыми преобразователями, использовать оператор свертки. В этом случае, результат преобразования цифрового входного сигнала будет равен:

$$y^*[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h^*[k]x^*[n-k], \quad (2.3)$$

где $y^*[n]$, $x^*[n]$ – цифровые входной и выходной сигналы преобразователя, $h^*[k]$ – дискретная весовая функция преобразователя.

Весовая функция преобразования, эквивалентного последовательности линейных цифровых преобразований, равна:

$$h^*[n] = h_1^*[n] * h_2^*[n] * \dots * h_m^*[n],$$

где * - символ операции дискретной свертки, m – количество преобразований. Для случая двух последовательно соединенных цифровых преобразователей последнее выражение примет вид

$$h^*[n] = \sum_{l=0}^n h_1^*[l]h_2^*[n-l].$$

Аналого-цифровые преобразователи являются обязательными элементами любого измерительного канала, содержащего в цепи преобразования измерительной информации операции ее цифровой обработки. Аналого-цифровое преобразование требует в качестве обязательных выполнения двух операций – дискретизации во времени и квантования по уровню. Математическую модель аналого-цифрового преобразования можно представить состоящей из последовательно соединенных между собой релейного (РЭ) и импульсного (ИЭ) элементов (рис. 2.1). При этом РЭ осуществляет квантование входной величины по уровню, а ИЭ – по времени.

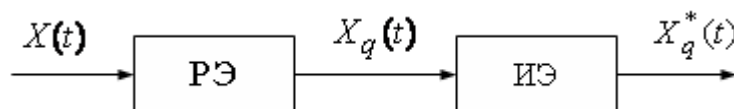


Рис. 2.1. Эквивалентная схема операции аналого-цифрового преобразования

Статические характеристики типовых многоступенчатых релейных элементов представлены на рис. 2.2.

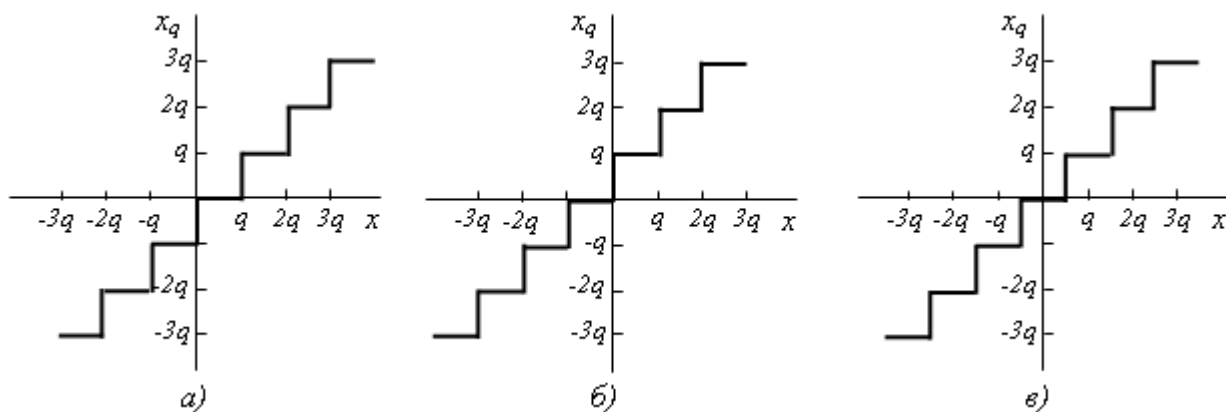


Рис. 2.2. Статические характеристики типовых многоступенчатых релейных

Характеристики РЭ определяются величиной шага квантования q . Если РЭ работает в соответствии с характеристиками, приведенными на рис. 2.2,*a* и *б*, то максимальная погрешность квантования по уровню равна q . В том случае, когда РЭ имеет характеристику, симметричную относительно оси ординат (рис. 2.2,*в*), максимальное значение погрешности определяется величиной $q/2$. Эту характеристику можно принять за базовую, так как она уменьшает вдвое максимальную методическую погрешность и может быть получена из первых двух путем подачи на вход РЭ постоянного смещения, равного соответственно $\pm q/2$. Величину

$$E_q(t) = X_q(t) - X(t)$$

называют ошибкой (шумом) квантования. Для базовой характеристики релейного элемента (рис. 2.2,*в*) $|E_q(t)| \leq q/2$.

Существуют различные подходы к оценке ошибки квантования $E_q(t)$. При случайных воздействиях на входе АЦП ошибку $E_q(t)$ удобно рассматривать как случайную помеху, статистические характеристики которой могут быть определены.

Обычно, для определения статистических характеристик шума квантования через статистические характеристики входного сигнала использовано разложение функции $E_q(t)$ в ряд Фурье

$$E_q(t) = \frac{q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \left[\frac{2\pi n}{q} X(t) \right].$$

Доказано, что для важного класса стационарных нормальных случайных процессов шум квантования не коррелирован с входным сигналом. При этом значения моментов ошибки квантования равны:

$$M\{E_q(t)\} = 0, \quad \text{т. е.} \quad M\{X_q(t)\} = M\{X(t)\},$$

$$M\{E_q^2(t)\} = D_{x_q} = \frac{q^2}{12}, \quad \text{т. е.} \quad M\{X_q^2(t)\} = M\{X^2(t)\} + \frac{q^2}{12}, \quad (2.4)$$

где $M\{\dots\}$ – математическое ожидание соответствующей величины. Если $\sigma_x/q \geq 0.5$ (где σ_x – среднеквадратическое значение входного сигнала $X(t)$), то ошибка в определении момента $M\{E_q^2\}$ с помощью выражения (2.4) не превосходит одного процента, а эффект взаимной корреляции шума квантования и не квантованного сигнала весьма мал (коэффициент корреляции не превосходит 0.015). При этом же условии нормированная корреляционная функция шума квантования может быть приближенно представлена в следующем виде:

$$\rho_{\varepsilon_q}(\tau) \approx e^{-\frac{4\pi^2\sigma_x^2}{q^2}[1-\rho_x(\tau)]}, \quad (2.5)$$

где $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция сигнала $X(t)$.
Корреляционная функция ошибки квантования

$$K_{\varepsilon_q}(\tau) = \frac{q^2}{12} \rho_{\varepsilon_q}(\tau).$$

Время корреляции ошибки $E_q(t)$ весьма мало, т. е. помеха $E_q(t)$ близка по своей природе к “белому шуму”.

Таким образом, первая часть эквивалентной схемы операции аналого-цифрового преобразования (рис. 2.1) может быть представлена в виде, изображенном на рис. 2.3, где $E_q(t)$ – помеха, вызванная эффектом квантования по уровню, близкая по своей природе к физическому “белому шуму”.

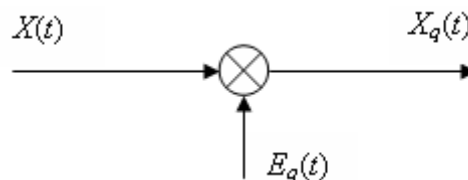


Рис. 2.3. Эквивалентная схема операции квантования по уровню

Рассматривая математическое описание работы импульсного элемента в схеме на рис. 2.1., можно заметить, что импульсный элемент осуществляет квантование входного сигнала по времени (обычно с постоянным периодом, равным T_s), преобразуя непрерывный сигнал в дискретную (решетчатую) функцию $X^*(n) = X[nT_s]$. Квантование непрерывной функции по времени принято описывать с помощью процесса импульсной модуляции

$$X_q^*(t) = X_q(t)\delta_T(t), \quad (2.6)$$

где $\delta_T(t)$ - последовательность дельта-функций

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s). \quad (2.7)$$

Таким образом, с выхода импульсного элемента поступает последовательность дельта-функций (см. рис. 2.4). Каждая величина этой последовательности имеет вес, равный значению квантуемого сигнала в момент квантования $t = nT_s$, который совпадает также с моментом выдачи импульса.

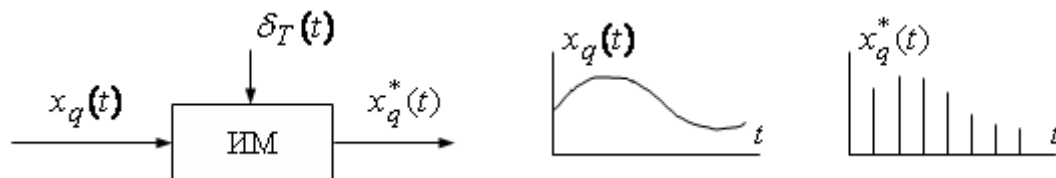


Рис. 2.4. Импульсный элемент

В работе [19] предлагается вместо детерминированной функции отсчетов (2.7) использовать стационарную случайную периодическую функцию вида

$$\delta_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s - \varepsilon), \quad (2.8)$$

где ε - случайная эпоха, закон распределения $f(\varepsilon)$ которой имеет вид

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & \text{при } -0.5T_s \leq \varepsilon \leq 0.5T_s, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| < 0.5T_s. \end{cases}$$

Там же доказывается, что только функция отбора (2.8) обеспечивает стационарность в широком смысле случайной последовательности, получаемой из исходного непрерывного стационарного случайного сигнала. При этом, очевидно, имеется в виду стационарность дискретного сигнала $X_q^*(t)$ как функции непрерывного времени.

Недостатком обоих из рассмотренных подходов к математическому описанию процесса квантования непрерывного сигнала по времени является то, что знак суммы в выражениях (2.7) и (2.8) обозначает не собственно операцию суммирования, а является условным обозначением последовательности дельта-функций. Следовательно, выражение (2.6) может рассматриваться лишь как описывающее структуру осуществляемых импульсным элементом преобразований и не может использоваться в расчетах.

Для формального описания операции дискретизации во времени удобно воспользоваться одним из главных свойств дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0).$$

Тогда решетчатая функция $X_q^*(n)$ на выходе импульсного элемента будет выражаться через входной непрерывный сигнал $X_q(t)$ следующим образом:

$$X_q^*(n) = \int_{-\infty}^{\infty} X_q(t)\delta(t - nT_s)dt = X_q(nT_s). \quad (2.9)$$

Переходя на терминологию функционального анализа, имеем, $X_q^*(n) = L[X_q(t)]$, где L – оператор, преобразующий функцию $X_q(t)$ в $X_q^*(n)$. Докажем, что оператор временной дискретизации является линейным. Пусть $X_q(t) = X_1(t) + X_2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
X_q^*(n) = L[X_1(t) + X_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(t) + X_2(t)]\delta(t - nT_s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t)\delta(t - nT_s)dt + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t)\delta(t - nT_s)dt = L[X_1(t)] + L[X_2(t)] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Если $X_q(t) = cX_1(t)$, то

$$X_q^*(n) = L[cX_1(t)] = c \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t)\delta(t - nT_s)dt = cL[X_1(t)] \quad (2.11)$$

Выражения (2.10) и (2.11) удовлетворяют определению линейного оператора, откуда следует возможность применения метода суперпозиции при рассмотрении задач прохождения сигналов через элемент, осуществляющий временную дискретизацию.

Основные статистические характеристики последовательности $X_q^*(n)$ могут быть получены из свойств исходного стационарного непрерывного сигнала.

Математическое ожидание будет равно:

$$M\{X_q^*(n)\} = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X_q(t)\delta(t - nT_s)dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} M\{X_q(t)\}\delta(t - nT_s)dt = M\{X_q(t)\} = m_{x_q}.$$

Очевидно, что корреляционная функция дискретного сигнала будет также дискретной

$$\begin{aligned}
K_{x_q}^*(n) &= M\{X_q^*(k)X_q^*(k+n)\} = \\
&= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X_q(\mu)\delta(\mu - kT_s)d\mu \int_{-\infty}^{\infty} X_q(\nu)\delta(\nu - (k+n)T_s)d\nu\right\} = \\
&= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_q(\mu)X_q(\nu)\delta(\mu - kT_s)\delta(\nu - (k+n)T_s)d\mu d\nu\right\}.
\end{aligned}$$

Применяя замену переменных вида $\nu = \lambda + \mu$, последнее выражение можно записать как

$$\begin{aligned}
K_{x_q}^*(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{X_q(\mu)X_q(\mu+\lambda)\}\delta(\mu-kT_s)\delta(\mu+\lambda-(k+n)T_s)d\mu d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_q}(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu-kT_s)\delta(\mu+\lambda-(k+n)T_s)d\mu \right] d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_q}(\lambda)\delta(\lambda-nT_s)d\lambda = K_{x_q}[nT_s].
\end{aligned}$$

Таким образом, значения корреляционной функции $K_{x_q}^*(n)$ случайной последовательности $X_q^*(n)$ равны значениям корреляционной функции $K_{x_q}(t)$ непрерывного сигнала $X_q(t)$ в моменты времени $t = nT_s$.

Как следует из последних выражений, принятое математическое описание квантования непрерывного сигнала по времени (2.9) обеспечивает стационарность в широком смысле получаемого дискретного сигнала.

Выражение, отражающее совместную работу релейного и импульсного элементов, будет иметь вид :

$$X_q^*(n) = X(nT_s) + E_q(nT_s). \quad (2.12)$$

Этому равенству отвечает модель, изображенная на рис. 2.5.

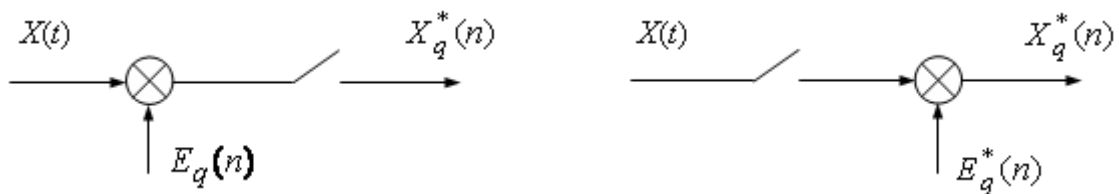


Рис. 2.5. Модель операции аналого-цифрового преобразования

Таким образом, на выходе аналого-цифрового преобразователя имеем сумму квантованной по времени входной величины $X(t)$ и ошибки квантования по уровню $E_q(t)$, также квантованной по времени. Следовательно, $E_q^*(n)$ представляет собой квантованный по времени "непрерывный белый шум", т. е. "дискретный белый шум" – числовую

последовательность, соседние значения которой не коррелированы между собой. Правомерность представления ошибки $E_q^*(n)$ в виде дискретного белого шума можно проверить в каждом конкретном случае с помощью выражения (2.5) по заданной нормированной корреляционной функции входного воздействия $\rho_x(t)$. Если значение $\rho_{\varepsilon}(T_s)$, определенное из (2.5), близко к нулю (например, меньше 0.1), то это означает, что с достаточной степенью точности можно рассматривать ошибку квантования как “дискретный белый шум” с корреляционной функцией вида

$$K_{\varepsilon_q}^*(n) = \frac{q^2}{12} \delta_0(n), \quad (2.13)$$

где $\delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

В дальнейшем ошибку квантования можно считать “дискретным белым шумом” при условии что $\rho_{\varepsilon_q}(T_s) < 0.1$, которое после подстановки выражения (2.5) будет иметь вид:

$$\frac{\sigma_x^2}{q^2} > \frac{0.058}{1 - \rho_x(T_s)}.$$

Необходимо отметить, что используемая в дальнейшем математическая модель (2.12), представляет собой идеальную реализацию операции аналого-цифрового преобразования при равномерном квантовании по уровню и равномерной дискретизации во времени.

2.2. Свойства цифро-аналогового преобразования

Цифро-аналоговые преобразователи присутствуют в структуре измерительного канала только в тех случаях, когда необходимо получить результат измерений в аналоговой форме. Намного чаще возникает задача восстановления значений измеряемых величин в моменты времени, не

совпадающие с моментами замера, но без преобразования их в аналоговую форму.

Восстановление обычно осуществляется с помощью различных методов экстра- и интерполяции. При этом восстановленный по дискретным значениям сигнал равен

$$y(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*(l)h(t-lT_s), \quad (2.14)$$

где $h(t)$ – весовая функция цифро-аналогового преобразователя (восстанавливающего элемента), $x^*(l)$ – восстанавливаемый дискретный (цифровой) сигнал, T_s – интервал времени между соседними замерами (период опроса).

Учитывая условие физической реализуемости восстанавливающего элемента

$$h(t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0,$$

слагаемые в выражении (2.14) будут не равны нулю при условии, что $t-lT_s \geq 0$ или $l \leq E[t/T_s]$. Тогда выражение (2.14) можно записать следующим образом:

$$y(t) = \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} x^*(l)h(t-lT_s) \quad (2.15)$$

и использовать в качестве математической модели операции восстановления.

2.3. Исследование свойств выходного сигнала интеллектуального измерительного канала

Обобщенная структурная схема программно-аппаратного измерительного канала, с учетом принятой математической модели операции аналого-цифрового преобразования, представлена на рис. 2.6, где $G(t)$ – сигнал на входе канала, $Z(t)$ – выходной сигнал канала, $h_a(t)$ – эквивалентная весовая функция аналоговой части канала (блока аналоговых

преобразований), $h_d^*(t)$ - эквивалентная весовая функция цифровой части канала (блока предварительной цифровой обработки), $h_r(t)$ - весовая функция восстанавливающего элемента (блока представления результатов), $E_q^*(n)$ - ошибка квантования по уровню в аналого-цифровом преобразователе.

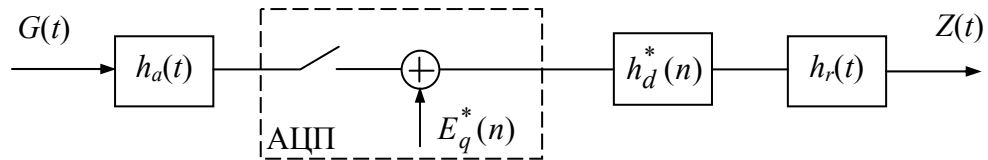


Рис. 2.6. Структура программно-аппаратного измерительного канала

Определим статистические характеристики (математическое ожидание и корреляционную функцию) выходного сигнала $Z(t)$ канала, когда на его вход воздействует случайный стационарный процесс $G(t)$.

Чтобы выразить реакцию программно-аппаратного канала $Z(t)$ на входное воздействие $G(t)$ через весовые функции составляющих его звеньев, запишем уравнения преобразований, осуществляемых на каждом из этапов обработки измеряемого сигнала.

Отклик аналоговой части $Y_a(t)$ на входной сигнал $G(t)$ равен [см. выражение (2.1)]:

$$Y_a(t) = \int_0^{\infty} h_a(\mu)G(t - \mu)d\mu, \quad (2.16)$$

где $h_a(t)$ - эквивалентная весовая функция аналоговой части канала.

Согласно математической модели операции аналого-цифрового преобразования [см. выражение (2.12)], сигнал на выходе АЦП равен:

$$Y_c^*(n) = X_c(nT_s) + E_q^*(n), \quad (2.17)$$

где $X_c(t)$ - сигнал на входе АЦП, $E_q^*(n)$ - ошибка квантования по уровню, представляющая собой “дискретный белый шум”.

Сигнал на выходе цифровой части $Y_d^*(n)$ определяется через дискретный аналог операции свертки входного сигнала $X_d^*(n)$ с эквивалентной весовой функцией цифровой части $h_d^*(n)$ [см. выражение (2.3)]:

$$Y_d^*(n) = \sum_{l=0}^{\infty} h_d^*(l) X_d^*(n-l). \quad (2.18)$$

Восстановленный сигнал $Y_r(t)$ на выходе ИК равен [см. выражение (2.15)]:

$$Y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{E[t/T_s]} X_r^*(n) h_r(t - nT_s), \quad (2.19)$$

где $X_r^*(n)$ - дискретный сигнал на входе восстанавливающего элемента, $h_r(t)$ - весовая функция восстанавливающего элемента, $E[\cdot]$ - целая часть числа.

Применив замену переменных вида $t - nT_s = kT_s + \xi T_s$, где $k = E[t/T_s] - n$, а $\xi = t/T_s - E[t/T_s]$, выражение (2.19) можно преобразовать к виду:

$$Y_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_r[(k + \xi)T_s] X_r^*(E[t/T_s] - k). \quad (2.19a)$$

Представим переменную t в выражении (2.19a) как $t = (m + \xi)T_s$, где $m = E[t/T_s]$, а $\xi = t/T_s - E[t/T_s]$. Обозначив $Y_r[(m + \xi)T_s]$ через $Y_r[m, \xi]$, получим, что сигнал на выходе восстанавливающего элемента равен:

$$Y_r[m, \xi] = \sum_{k=0}^{\infty} h_r[k, \xi] X_r^*(m - k). \quad (2.19б)$$

Переменная ξ в выражении (2.19б) может принимать любые значения в диапазоне от 0 до 1 ($0 \leq \xi < 1$).

Получим выражение для выходного сигнала $Z(t)$ программно-аппаратного ИК. Так как $Z(t) = Y_r(t)$, а $X_r^*(n) = Y_d^*(n)$, подставим выражение (2.18) в (2.19б):

$$Z[m, \xi] = \sum_{k=0}^{\infty} h_r[k, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_d^*(l) X_d^*(m - k - l).$$

Применяя замену переменных вида $k+l=n$, последнее выражение можно записать как

$$Z[m, \xi] = \sum_{n=0}^{\infty} X_d^*(m - n) \sum_{k=0}^{\infty} h_r[k, \xi] h_d^*(n - k).$$

Таким образом,

$$Z[m, \xi] = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] X_d^*(m - n), \quad (2.20)$$

где

$$h_w[n, \xi] = \sum_{k=0}^{\infty} h_r[k, \xi] h_d^*(n - k) \quad (2.21)$$

есть эквивалентная весовая функция цифровой части ИК и восстанавливающего элемента. В силу того, что $X_d^*(n) = Y_c^*(n)$, подставим выражение (2.17) в (2.20). При этом получим:

$$Z[m, \xi] = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] (X_c[(m - n)T_s] + E_q^*(m - n)). \quad (2.22)$$

В свою очередь $X_c[nT_s] = Y_a[nT_s]$. Подставив (2.16) в (2.22), получим окончательное выражение для выходного сигнала программно-аппаратного ИК

$$Z[m, \xi] = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(E_q^*(m - n) + \int_0^{\infty} h_a(\mu) G[(m - n)T_s - \mu] d\mu \right). \quad (2.23)$$

Математическое ожидание случайной функции $Z(t)$ равно:

$$m_z(t) = M\{Z[m, \xi]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(M\{E_q^*(m - n)\} + \int_0^{\infty} h_a(\mu) M\{G[(m - n)T_s - \mu]\} d\mu \right),$$

где $m = E[t/T_s]$, а $\xi = t/T_s - E[t/T_s]$.

Учитывая, что математическое ожидание ошибки квантования по уровню равно 0, получим:

$$m_z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \int_0^{\infty} h_a(\mu) m_g[(m-n)T_s - \mu] d\mu, \quad (2.24)$$

где $m_g(t)$ – математическое ожидание входного сигнала $G(t)$ программно-аппаратного измерительного канала, которое, согласно принятой математической модели измерительной информации, в общем случае зависит от времени.

Получим выражение для корреляционной функции выходного сигнала $Z(t)$, которая по определению равна:

$$K_z(t, t + \tau) = M \{ \overset{\circ}{Z}(t) \overset{\circ}{Z}(t + \tau) \} = M \{ \overset{\circ}{Z}[k, \xi] \overset{\circ}{Z}[k + m, \psi] \},$$

где $\overset{\circ}{Z}(t)$ – центрированный случайный сигнал, $k = E \left[\frac{t}{T_s} \right]$, $\xi = \frac{t}{T_s} - k$,

$$m = E \left[\frac{t + \tau}{T_s} \right] - k, \quad \psi = \frac{t + \tau}{T_s} - m - k.$$

Выражение для центрированного случайного сигнала $\overset{\circ}{Z}(t)$, определяемого как

$$\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t),$$

с учетом (2.23) и (2.24) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Z}[m, \xi] &= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(E_q^*(m-n) + \int_0^{\infty} h_a(\mu) G[(m-n)T_s - \mu] d\mu \right) - \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \int_0^{\infty} h_a(\nu) m_g[(m-l)T_s - \nu] d\nu = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(E_q^*(m-n) + \int_0^{\infty} h_a(\mu) \{ G[(m-n)T_s - \mu] - m_g[(m-n)T_s - \mu] \} d\mu \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(E_q^*(m-n) + \int_0^{\infty} h_a(\mu) \overset{\circ}{G}[(m-n)T_s - \mu] d\mu \right), \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{G}(t)$ – входной центрированный случайный сигнал, который, согласно

принятой математической модели измерительной информации, является стационарным. В дальнейшем для краткости записи значок \circ в обозначении центрированных функций будем опускать.

Подставив полученное выражение в формулу для корреляционной функции выходного сигнала измерительного канала, получим:

$$\begin{aligned}
K_z(t, t + \tau) &= M \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \times \left(E_q^*(k - n) + \int_0^{\infty} h_a(\mu) G[(k - n)T_s - \mu] d\mu \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times \left(E_q^*(k + m - l) + \int_0^{\infty} h_a(\nu) G[(k + m - l)T_s - \nu] d\nu \right) \right\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times \left(\int_0^{\infty} h_a(\nu) M \{ E_q^*(k - n) G[(k + m - l)T_s - \nu] \} d\nu + \right. \\
&\quad \left. + M \{ E_q^*(k - n) E_q^*(k + m - l) \} + \int_0^{\infty} h_a(\mu) M \{ E_q^*(k + m - l) G[(k - n)T_s - \mu] \} d\mu + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_a(\nu) M \{ G[(k - n)T_s - \mu] G[(k + m - l)T_s - \nu] \} d\nu d\mu \right).
\end{aligned}$$

Математическое ожидание функции $E_q^*(n)G(t)$ есть не что иное, как взаимная корреляционная функция ошибки квантования по уровню в аналого-цифровом преобразователе и входного воздействия программно-аппаратного ИК. Согласно принятой математической модели операции аналого-цифрового преобразования, взаимная корреляционная функция ошибки квантования по уровню $E_q^*(n)$ и входного воздействия $X_c(t)$ равна нулю. Следовательно, равна нулю и взаимная корреляционная функция ошибки $E_q^*(n)$ и сигнала $G(t)$. Тогда последнее выражение будет равно:

$$\begin{aligned}
K_z(t, t + \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times \\
&\quad \times \left(K_{\varepsilon_q}^*(l - m - n) + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_a(\nu) K_g[(l - m - n)T_s - \mu + \nu] d\nu d\mu \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\mu - \nu = \lambda| = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times \\
&\times \left(K_{\varepsilon_q}^*(l - m - n) + \int_{-\infty}^{\infty} K_g[(l - m - n)T_s - \lambda] \int_0^{\infty} h_a(\nu) h_a(\nu + \lambda) d\nu d\lambda \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times \left(K_{\varepsilon_q}^*(l - m - n) + \int_{-\infty}^{\infty} R_{aa}(\lambda) K_g[(l - m - n)T_s - \lambda] d\lambda \right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Здесь

$$R_{aa}(t) = \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_a(\mu + t) d\mu \tag{2.26}$$

есть корреляционная функция весовой функции аналоговой части программно-аппаратного ИК; $K_{\varepsilon_q}^*(n)$ - корреляционная функция ошибки квантования по уровню; $K_g(t)$ - корреляционная функция сигнала на входе программно-аппаратного ИК.

Выражение (2.25) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
K_z(t, t + \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \psi] \times (K_{\varepsilon_q}^*(l - m - n) + K_{y_a}[(l - m - n)T_s]) = |l - n = k| = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (K_{\varepsilon_q}^*(k - m) + K_{y_a}[(k - m)T_s]) \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] h_w[n + k, \psi],
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$K_{y_a}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{aa}(\lambda) K_g(t - \lambda) d\lambda \tag{2.28}$$

- корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части канала.

Таким образом, корреляционная функция сигнала на выходе программно-аппаратного канала зависит от обоих своих аргументов t и τ .

Это означает, что случайная функция $\overset{\circ}{Z}(t)$ не является стационарной. Однако

при значениях τ кратных T_s (т.е. при $\tau = iT_s$, где i – целое число) получим:

$$m = E \left[\frac{t + iT_s}{T_s} \right] - k = E \left[\frac{t}{T_s} \right] + i - k = i,$$

$$\psi = \frac{t + iT_s}{T_s} - m - k = \frac{t}{T_s} - k = \xi.$$

Тогда выражение (2.27) примет следующий вид:

$$K_z(t, t + iT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (K_{\varepsilon_q}^*(k-i) + K_{y_a}[(k-i)T_s]) \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] h_w[n+k, \xi].$$

Следовательно, стационарной будет случайная последовательность, представляющая собой значения функции $\overset{\circ}{Z}(t)$ в моменты времени $t_k = (k + \xi)T_s$, где ξ имеет любое фиксированное значение в диапазоне $0 \leq \xi < 1$, $k=1,2,3\dots$ Корреляционную функцию последовательности $\overset{\circ}{Z}[k, \xi]$ будем обозначать $K_z^{\xi}(iT_s)$, подчеркивая тем самым, что она существует только при значениях аргумента, кратных T_s , и при этом значения функции зависят от параметра ξ , который можно трактовать как континуальный номер последовательности.

Продолжив преобразования полученного выше выражения, получим:

$$K_z^{\xi}(iT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (K_{\varepsilon_q}^*(k-i) + K_{y_a}[(k-i)T_s]) R_{ww}^{\xi}(kT_s),$$

где

$$R_{ww}^{\xi}(kT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] h_w[n+k, \xi] \quad (2.29)$$

- корреляционная функция непрерывной весовой функции $h_w(t)$.

Учитывая, что корреляционная функция ошибки квантования по уровню отлична от нуля только при значении аргумента, равном нулю [см. выражение (2.13)], окончательное выражение для корреляционной функции сигнала на выходе программно-аппаратного измерительного канала примет

следующий вид:

$$K_z^\xi(iT_s) = \frac{q^2}{12} R_{ww}^\xi(iT_s) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{y_a}[(k-i)T_s] R_{ww}^\xi(kT_s). \quad (2.30)$$

Первое слагаемое в выражении (2.30) обусловлено наличием ошибки квантования по уровню в аналого-цифровом преобразователе, второе - случайной природой входного воздействия $G(t)$.

Таким образом, в общем случае реакция программно-аппаратного измерительного канала $\overset{\circ}{Z}(t)$ на стационарное входное воздействие $\overset{\circ}{G}(t)$ является **нестационарным** процессом. Стационарной является случайная последовательность, представляющая собой совокупность значений центрированного выходного сигнала $\overset{\circ}{Z}(t)$ канала в моменты времени $t_k = (k + \xi)T_s$, при фиксированном значении ξ , где $0 \leq \xi < 1$, $k = 1, 2, 3 \dots$

2.4. Математическая модель погрешности цифровой обработки измерительной информации в измерительном канале

В случае прямых измерений, имеющих место в АСУТП рыбоводного комплекса, необходимо определять значение величины непосредственно воздействующей на вход измерительного канала. В общем же случае, имеющем место при осуществлении косвенных измерений, определяемая (искомая) величина функционально связана с воздействующей на вход (измеряемой) величиной. Получим математическую модель погрешности цифровой обработки измерительной информации для случая косвенных измерений, как более общего по сравнению с прямыми измерениями.

Погрешность определения искомой величины будем рассматривать по отношению к ее истинному значению.

Схема выделения погрешности определения искомой величины в этом случае представлена на рис. 2.7, где $X(t)$ – измеряемая величина, $N(t)$ – помеха, $Y(t)$ – истинное значение искомой величины, $Z(t)$ – оценка искомой величины, $E_q^*(n)$ – ошибка квантования по уровню в аналого-цифровом

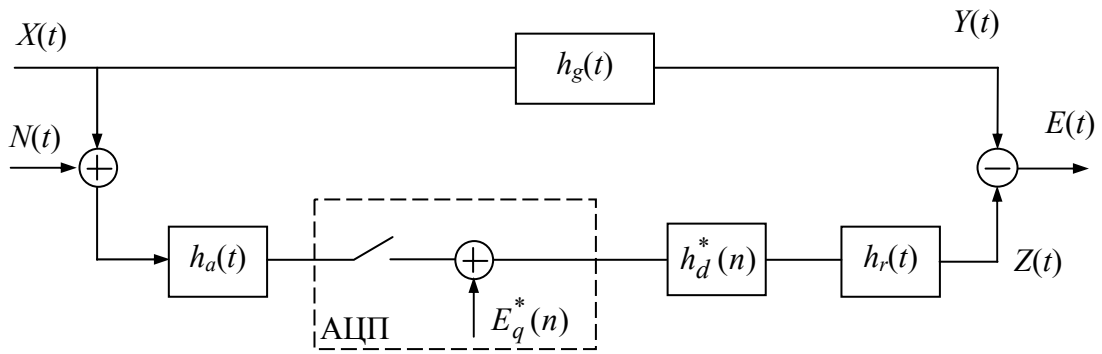


Рис. 2.7. Схема выделения погрешности цифровой обработки измерительной информации в программно-аппаратном ИК

преобразователе, $h_g(t)$ – весовая функция операции преобразования измеряемой величины в искомую, $h_a(t)$ – весовая функция аналоговой части программно-аппаратного ИК, $h_d^*(n)$ – дискретная весовая функция цифровой части программно-аппаратного ИК, $h_r(t)$ – весовая функция восстанавливающего элемента [20].

Погрешность определения искомой величины равна разности между ее оценкой и истинным значением:

$$E(t) = Y(t) - Z(t). \quad (2.31)$$

Согласно принятой модели измерительной информации центрированная измеряемая величина $\overset{\circ}{X}(t)$ принадлежит к классу стационарных случайных процессов. В случае, когда операция вычисления значения искомой величины по значению измеряемой величины описывает работу стационарной линейной системы, центрированное истинное значение

$\overset{\circ}{Y}(t)$ искомой величины также будет стационарной случайной функцией. В свою очередь, оценка $\overset{\circ}{Z}(t)$ искомой величины, как было доказано ранее, принадлежит к классу нестационарных случайных процессов. В итоге, погрешность $E(t)$ определения искомой величины, рассчитываемая по формуле (2.31), будет нестационарным случайным процессом. В то же время, учитывая стационарность случайной последовательности $\overset{\circ}{Z}[(k + \xi)T_s]$, можно предположить, что случайная последовательность $\overset{\circ}{E}[(k + \xi)T_s]$ также будет стационарной.

Определим статистические характеристики случайной последовательности $E[k, \xi] = E[(k + \xi)T_s]$, а именно математическое ожидание и корреляционную функцию.

Математическое ожидание будет равно:

$$m_{\varepsilon}[k, \xi] = M\{E[k, \xi]\} = M\{Y[k, \xi] - Z[k, \xi]\} = m_y[k, \xi] - m_z[k, \xi], \quad (2.32)$$

где $m_y[k, \xi]$ – математическое ожидание случайной последовательности $Y[k, \xi]$, $m_z[k, \xi]$ – математическое ожидание случайной последовательности $Z[k, \xi]$.

Значение искомой величины $Y(t)$ можно определить через значение измеряемой величины $X(t)$ с помощью интеграла Дюамеля:

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h_g(\mu) X(t - \mu) d\mu, \quad (2.33)$$

где $h_g(\mu)$ – весовая функция процедуры преобразования измеряемой величины в искомую величину.

Если для получения значения искомой величины необходимо выполнить несколько последовательных операций над значением измеряемой величины, то эквивалентная весовая функция всей процедуры будет равна свертке весовых функций отдельных операций:

$$h_g(t) = h_{g1}(t) * h_{g2}(t) * h_{g3}(t) * \dots * h_{gl}(t),$$

где $*$ - операция свертки, $h_{g1}(t), h_{g2}(t), h_{g3}(t), \dots, h_{gl}(t)$ - весовые функции l операций, входящих в состав процедуры преобразования измеряемой величины в искомую величину.

Тогда математическое ожидание истинного значения искомой величины будет равно:

$$m_y(t) = M\{Y(t)\} = M\left\{\int_0^{\infty} h_g(\mu)X(t-\mu)d\mu\right\} = \int_0^{\infty} h_g(\mu)m_x(t-\mu)d\mu, \quad (2.34)$$

где $m_x(t)$ – математическое ожидание измеряемой величины $X(t)$.

Подставив (2.24) и (2.34) в выражение (2.32), получим:

$$m_\varepsilon[k, \xi] = \int_0^{\infty} h_g(\mu)m_x[(k+\xi)T_s - \mu]d\mu - \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \int_0^{\infty} h_a(v)m_g[(k-n)T_s - v]dv. \quad (2.35)$$

Корреляционная функция случайной последовательности $E[k, \xi]$ будет равна:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon^\xi(iT_s) &= M\{\overset{\circ}{E}[k, \xi]\overset{\circ}{E}[k+i, \xi]\} = M\{(\overset{\circ}{Y}[k, \xi] - \overset{\circ}{Z}[k, \xi])(\overset{\circ}{Y}[k+i, \xi] - \overset{\circ}{Z}[k+i, \xi])\} = \\ &= M\{\overset{\circ}{Y}[k, \xi]\overset{\circ}{Y}[k+i, \xi]\} - M\{\overset{\circ}{Y}[k, \xi]\overset{\circ}{Z}[k+i, \xi]\} - M\{\overset{\circ}{Z}[k, \xi]\overset{\circ}{Y}[k+i, \xi]\} + \\ &+ M\{\overset{\circ}{Z}[k, \xi]\overset{\circ}{Z}[k+i, \xi]\} = K_y(iT_s) - K_{yz}^\xi(iT_s) - K_{zy}^\xi(iT_s) + K_z^\xi(iT_s), \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $K_y(t)$ - корреляционная функция истинного значения $Y(t)$ искомой величины, $K_z^\xi(iT_s)$ - корреляционная функция случайной последовательности $Z[k, \xi]$, $K_{yz}^\xi(iT_s)$, $K_{zy}^\xi(iT_s)$ - взаимные корреляционные функции случайных последовательностей $Y[k, \xi]$ и $Z[k, \xi]$.

Выражение для корреляционной функции $K_z^\xi(iT_s)$ было найдено ранее

[см. выражение (2.30)]. Получим выражения для нахождения корреляционных функций $K_{yz}^{\xi}(iT_s)$, $K_{zy}^{\xi}(iT_s)$ и $K_y(t)$.

Центрированный случайный сигнал $\overset{\circ}{Y}(t)$ равен:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{Y}(t) &= Y(t) - m_y(t) = \int_0^{\infty} h_g(\mu)X(t - \mu)d\mu - \int_0^{\infty} h_g(\nu)m_x(t - \nu)d\nu = \\ &= \int_0^{\infty} h_g(\mu)[X(t - \mu) - m_x(t - \mu)]d\mu = \int_0^{\infty} h_g(\mu)\overset{\circ}{X}(t - \mu)d\mu.\end{aligned}$$

Тогда взаимная корреляционная функция случайных последовательностей $Y[k, \xi]$ и $Z[k, \xi]$:

$$\begin{aligned}K_{yz}^{\xi}(iT_s) &= M\{Y[k, \xi]Z[k + i, \xi]\} = M\left\{\int_0^{\infty} h_g(\nu)X[(k + \xi)T_s - \nu]d\nu \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \times \left(E_q^*(k + i - l) + \int_0^{\infty} h_a(\mu)G[(k + i - l)T_s - \mu]d\mu \right) \right\},\end{aligned}$$

где $G(t) = X(t) + N(t)$ – сигнал на входе программно-аппаратного канала. Здесь и далее для краткости записи значок \circ в обозначении центрированных функций опущен.

В результате дальнейших преобразований получим:

$$\begin{aligned}K_{yz}^{\xi}(iT_s) &= \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \times \left(\int_0^{\infty} h_g(\nu)M\{E_q^*(k + i - l)X[(k + \xi)T_s - \nu]\}d\nu + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_g(\nu)h_a(\mu)M\{X[(k + \xi)T_s - \nu]G[(k + i - l)T_s - \mu]\}d\nu d\mu \right).\end{aligned}$$

Здесь $M\{E_q^*(k + i - l)X[(k + \xi)T_s - \nu]\}$ – взаимная корреляционная функция измеряемой величины и ошибки квантования по уровню в аналого-цифровом преобразователе. Вследствие того, что сигналы $E_q^*(l)$ и $X(t)$ не коррелированы между собой, их взаимная корреляционная функция равна нулю. Тогда последнее выражение примет следующий вид:

$$K_{yz}^{\xi}(iT_s) = \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_g(\nu) h_a(\mu) K_{gx}[(l-i+\xi)T_s - \nu + \mu] d\mu d\nu,$$

где $K_{gx}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция сигнала на входе ПА ИК и измеряемой величины. Введя замену переменных вида $\nu - \mu = \lambda$, получим:

$$\begin{aligned} K_{yz}^{\xi}(iT_s) &= \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \int_{-\infty}^{\infty} K_{gx}[(l-i+\xi)T_s - \lambda] \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_g(\mu + \lambda) d\mu d\lambda = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] \int_{-\infty}^{\infty} K_{gx}[(l-i+\xi)T_s - \lambda] R_{ag}(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$R_{ag}(t) = \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_g(\mu + t) d\mu \quad (2.37)$$

- взаимная корреляционная функция весовых функций операции преобразования измеряемой величины в искомую и аналоговой части программно-аппаратного измерительного канала.

В результате дальнейших преобразований получим:

$$K_{yz}^{\xi}(iT_s) = \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] K_{y_{ay}}[(l-i+\xi)T_s],$$

где

$$K_{y_{ay}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ag}(\lambda) K_{gx}(t - \lambda) d\lambda \quad (2.38)$$

- взаимная корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части программно-аппаратного канала и истинного значения искомой величины.

Таким образом, окончательное выражение для вычисления взаимной корреляционной функции $K_{yz}^{\xi}(iT_s)$ будет иметь следующий вид:

$$K_{yz}^{\xi}(iT_s) = \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] K_{y_{ay}}[l-i, \xi], \quad (2.39)$$

где $K_{y_{ay}}[l-i, \xi] = K_{y_{ay}}[(l-i+\xi)T_s]$.

Из свойств взаимной корреляционной функции следует, что

$$K_{zy}^{\xi}(iT_s) = K_{yz}^{\xi}(-iT_s).$$

Следовательно

$$K_{zy}^{\xi}(iT_s) = \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] K_{y_{ay}}[l+i, \xi]. \quad (2.40)$$

Как было отмечено выше, центрированное истинное значение $Y(t)$ искомой величины представляет собой стационарный случайный процесс. Следовательно, корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$ будет зависеть только от одного аргумента:

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= M\{Y(t)Y(t+\tau)\} = M\left\{\int_0^{\infty} h_g(\mu)X(t-\mu)d\mu \int_0^{\infty} h_g(\nu)X(t+\tau-\nu)d\nu\right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\nu)K_x(\tau-\nu+\mu)d\nu d\mu = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\nu)K_x(\tau-\nu+\mu)d\nu d\mu = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\nu)K_x(\tau-\nu+\mu)d\nu d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau-\lambda) \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\mu+\lambda)d\mu d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau-\lambda)R_{gg}(\lambda)d\lambda, \quad (2.41) \end{aligned}$$

где

$$R_{gg}(t) = \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\mu+t)d\mu \quad (2.42)$$

есть корреляционная функция эквивалентной весовой функции $h_g(t)$.

Подставив в формулу (2.36) выражения (2.33), (2.39), (2.40) и (2.41), получим:

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon}^{\xi}(iT_s) &= \frac{q^2}{12} R_{ww}^{\xi}(iT_s) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{y_a}[(k-i)T_s] R_{ww}^{\xi}(kT_s) - \\ &- \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] K_{y_{ay}}[l-i, \xi] - \sum_{m=0}^{\infty} h_w[m, \xi] K_{y_{ay}}[m+i, \xi] + \int_{-\infty}^{\infty} K_x(iT_s - \lambda) R_{gg}(\lambda) d\lambda. \quad (2.43) \end{aligned}$$

Дисперсия случайной последовательности $E[(k+\xi)T_s]$ будет равна значению корреляционной функции $K_{\varepsilon}^{\xi}(iT_s)$ при $i=0$:

$$D_{\varepsilon}^{\xi} = K_y(0) - 2K_{yz}^{\xi}(0) + K_z^{\xi}(0). \quad (2.44)$$

В качестве оценок погрешности удобнее всего использовать относительные величины. В частности, относительная среднеквадратическая погрешность определения искомой величины $Y(t)$ равна:

$$\eta_y^{\xi} = \sqrt{\frac{D_{\varepsilon}^{\xi}}{D_y}}, \quad (2.45)$$

где D_{ε}^{ξ} - дисперсия погрешности определения искомой величины, D_y - дисперсия истинного значения искомой величины.

Поскольку дисперсия погрешности и относительная среднеквадратическая погрешность зависят от значения параметра ξ , то на практике применяют две различные оценки точности [21,22]:

1. Максимальное значение относительной среднеквадратической погрешности:

$$\eta_y^{\max} = \sup \eta_y^{\xi} = \sup \sqrt{\frac{D_{\varepsilon}^{\xi}}{D_y}}. \quad (2.46)$$

Эта характеристика используется, когда на основе единичного значения величины в любой заданный момент времени принимается какое-либо решение (например, по управлению технологическим процессом).

2. Усредненное значение относительной среднеквадратической погрешности:

$$\eta_y^{cp} = \sqrt{\int_0^1 (\eta_y^{\xi})^2 d\xi} = \sqrt{\frac{1}{D_y} \int_0^1 D_{\varepsilon}^{\xi} d\xi}. \quad (2.47)$$

Данную характеристику применяют при одновременном использовании ряда значений измеряемой величины, полученных в различные моменты времени (например, при вычислении функций измеряемых величин, в которые входит множество значений этих величин, определенных в различные заданные моменты времени).

2.5. Методика расчета методической погрешности цифровой обработки измерительной информации в интеллектуальном измерительном канале

Методика позволяет получить выражения для систематической и случайной составляющих методической погрешности цифровой обработки измерительной информации в интеллектуальном измерительном канале. При этом в качестве оценки систематической составляющей принимается математическое ожидание последовательности отсчетов случайной функции погрешности, а в качестве оценки случайной составляющей - относительная среднеквадратическая погрешность.

Расчет осуществляется следующим образом:

1. Вычисляем эквивалентную весовую функцию аналоговой части измерительного канала:

$$h_a(t) = h_{a1}(t) * h_{a2}(t) * h_{a3}(t) * \dots * h_{ak}(t), \quad (2.48)$$

где $*$ - операция свертки, $h_{a1}(t), h_{a2}(t), h_{a3}(t), \dots, h_{ak}(t)$ - весовые функции k звеньев, входящих в состав аналоговой части ИК.

2. Вычисляем эквивалентную весовую функцию цифровой части измерительного канала:

$$h_d^*(n) = h_{d1}^*(n) * h_{d2}^*(n) * h_{d3}^*(n) * \dots * h_{dm}^*(n), \quad (2.49)$$

где $*$ - операция дискретной свертки, $h_{d1}^*(t), h_{d2}^*(t), h_{d3}^*(t), \dots, h_{dm}^*(t)$ - весовые функции m звеньев, входящих в состав цифровой части ИК.

3. Вычисляем эквивалентную весовую функцию цифровой части измерительного канала и восстанавливающего элемента:

$$h_w[n, \xi] = \sum_{k=0}^{\infty} h_r[k, \xi] h_d^*(n - k), \quad (2.50)$$

где $h_r(t)$ - весовая функция восстанавливающего элемента.

4. Вычисляем эквивалентную весовую функцию процедуры вычисления истинного значения искомой величины $Y(t)$ по значению измеряемой величины $X(t)$:

$$h_g(t) = h_{g1}(t) * h_{g2}(t) * h_{g3}(t) * \dots * h_{gl}(t), \quad (2.51)$$

где $*$ - операция свертки, $h_{g1}(t), h_{g2}(t), h_{g3}(t), \dots, h_{gl}(t)$ - весовые функции l операций, входящих в состав процедуры.

5. Вычисляем математическое ожидание последовательности отсчетов $Z[k, \xi]$ случайного сигнала на выходе интеллектуального измерительного канала:

$$m_z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] \int_0^{\infty} h_a(\mu) m_g[(m-n)T_s - \mu] d\mu, \quad (2.52)$$

где $m_g(t)$ - математическое ожидание входного воздействия ИК.

6. Вычисляем математическое ожидание последовательности отсчетов $E[k, \xi]$ случайной функции погрешности определения искомой величины:

$$m_\varepsilon[k, \xi] = \int_0^{\infty} h_g(\mu) m_x[(k + \xi)T_s - \mu] d\mu - m_z[k, \xi], \quad (2.53)$$

где $m_x(t)$ - математическое ожидание измеряемой величины.

7. Вычисляем корреляционную функцию эквивалентной весовой функции аналоговой части измерительного канала:

$$R_{aa}(t) = \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_a(\mu + t) d\mu. \quad (2.54)$$

8. Вычисляем корреляционную функцию сигнала на выходе аналоговой части измерительного канала:

$$K_{y_a}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{aa}(\lambda) K_g(t - \lambda) d\lambda, \quad (2.55)$$

где $K_g(t)$ - корреляционная функция сигнала на входе измерительного канала.

9. Вычисляем корреляционную функцию эквивалентной весовой функции цифровой части измерительного канала и восстанавливающего элемента:

$$R_{ww}^{\xi}(kT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_w[n, \xi] h_w[n+k, \xi]. \quad (2.56)$$

10. Вычисляем дисперсию последовательности отсчетов $Z[k, \xi]$ случайного сигнала на выходе интеллектуального измерительного канала:

$$D_z^{\xi} = K_z^{\xi}(0) = \frac{q^2}{12} R_{ww}^{\xi}(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{y_a}(kT_s) R_{ww}^{\xi}(kT_s). \quad (2.57)$$

11. Вычисляем взаимную корреляционную функцию эквивалентных весовых функций аналоговой части интеллектуального измерительного канала и операции преобразования измеряемой величины в искомую:

$$R_{ag}(t) = \int_0^{\infty} h_a(\mu) h_g(\mu+t) d\mu. \quad (2.58)$$

12. Вычисляем взаимную корреляционную функцию сигнала на выходе аналоговой части интеллектуального измерительного канала и истинного значения искомой величины:

$$K_{y_a y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ag}(\lambda) K_{gx}(t-\lambda) d\lambda, \quad (2.59)$$

где $K_{gx}(t)$ - взаимная корреляционная функция сигнала на входе измерительного канала и измеряемой величины.

13. Вычисляем значение взаимной корреляционной функции случайных последовательностей отсчетов искомой величины $Y[k, \xi]$ и выходного сигнала интеллектуального измерительного канала $Z[k, \xi]$ при нулевом значении аргумента:

$$K_{yz}^{\xi}(0) = \sum_{l=0}^{\infty} h_w[l, \xi] K_{y_a y}[l, \xi]. \quad (2.60)$$

14. Вычисляем корреляционную функцию эквивалентной весовой функции операции преобразования измеряемой величины в искомую:

$$R_{gg}(t) = \int_0^{\infty} h_g(\mu)h_g(\mu+t)d\mu. \quad (2.61)$$

15. Вычисляем дисперсию истинного значения искомой величины:

$$D_y = K_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{gg}(\lambda)K_x(-\lambda)d\lambda, \quad (2.62)$$

где $K_x(t)$ - корреляционная функция измеряемой величины.

16. Вычисляем дисперсию последовательности отсчетов $E[k, \xi]$ случайной функции погрешности определения искомой величины:

$$D_{\varepsilon}^{\xi} = K_{\varepsilon}^{\xi}(0) = D_z^{\xi} - 2K_{yz}^{\xi}(0) + D_y. \quad (2.63)$$

17. Вычисляем максимальное

$$\eta_y^{\max} = \sup \sqrt{\frac{D_{\varepsilon}^{\xi}}{D_y}} \quad (2.64)$$

или усредненное

$$\eta_y^{cp} = \sqrt{\frac{1}{D_y} \int_0^1 D_{\varepsilon}^{\xi} d\xi} \quad (2.65)$$

значение относительной среднеквадратической погрешности.

Таким образом, анализ моделей интеллектуальных измерительных каналов позволяет сделать следующие выводы:

1. Сложность задачи анализа функционирования программно-аппаратного измерительного канала обусловлена невозможностью свести ее к исследованию только одного "сквозного" линейного оператора всего измерительного канала.

2. В общем случае реакция программно-аппаратного измерительного канала на стационарное входное воздействие является нестационарным процессом. Стационарной является случайная последовательность, представляющая собой совокупность значений центрированного выходного сигнала канала в моменты времени, кратные периоду дискретизации.

3. Случайная функции погрешности, представляющая собой разность

истинного значения искомой величины и ее оценки на выходе программно-аппаратного измерительного канала, является нестационарным процессом. Однако, как и в случае с выходным сигналом программно-аппаратного измерительного канала, стационарной является случайная последовательность, представляющая собой совокупность значений центрированной функции погрешности в моменты времени, кратные периоду дискретизации T_s .

4. Вследствие того, что среднеквадратическая погрешность зависит от значения параметра ξ , изменяющегося в диапазоне от нуля до единицы, точность получаемых оценок зависит от момента времени внутри интервала дискретизации.

5. Математическая модель погрешности цифровой обработки измерительной информации (2.43) может быть использована в качестве критерия качества при параметрическом синтезе программно-аппаратных измерительных каналов.

6. Выражение (2.30) может быть использовано в качестве математической модели программно-аппаратного измерительного канала, при его математическом моделировании.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОДНОКАНАЛЬНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ.....	36
2.1. Математические модели измерительных компонентов.....	36
2.2. Свойства цифро-аналогового преобразования	46
2.3. Исследование свойств выходного сигнала интеллектуального измерительного канала.....	47
2.4. Математическая модель погрешности цифровой обработки измерительной информации в измерительном канале	55
2.5. Методика расчета методической погрешности цифровой обработки измерительной информации в интеллектуальном измерительном канале.....	63

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Как правило, интеллектуальная измерительная система является нелинейной. Нелинейность интеллектуальных систем проявляется не в смысле нелинейной статической характеристики первичного преобразователя, как это принято в обычных системах, а в смысле нелинейного взаимодействия нескольких измерительных каналов с целью косвенного измерения обобщенного показателя. Например, при управлении процессом абсорбции [23] используется степень насыщения абсорбента, которая представляет собой частное от деления результатов прямых измерений двух расходов:

$$CH = (Q1 - Q2) / Q2,$$

где Q_1 – расход тощего абсорбента; Q_2 – расход насыщенного абсорбента.

Дробное взаимодействие является одним из распространенных. Достаточно вспомнить такие обобщенные показатели, как коэффициент полезного действия или себестоимость. Однако не менее распространенным является мультипликативное взаимодействие нескольких измерительных каналов. Например, косвенное измерение количества тепла – мультипликативное взаимодействие трех измерительных каналов (расхода теплоносителя и двух температур):

$$Q_T = C (T_2 - T_1) Q_3,$$

где Q_T - количество тепла; C – теплоёмкость; T_2 - температура на выходе; T_1 - температура на входе.

Критерием оптимизации при параметрическом синтезе таких информационно-измерительных систем с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов является минимум методической погрешности вычислений, при этом сама погрешность должна быть выражена как функция параметров информационно-измерительной системы (ИИС) и измеряемых сигналов. Для этого необходимо выделить структурные составляющие ИИС, выбрать для них адекватное математическое описание и, согласно выбранному вероятностному методу, выразить погрешность обработки информации в ИИС. Но первым этапом должна быть, конечно, линеаризация системы.

3.1. Линеаризация информационно-измерительной системы

Обобщенная функциональная схема нелинейной системы (для случая мультипликативного взаимодействия каналов измерения) приведена на рис.3.1.

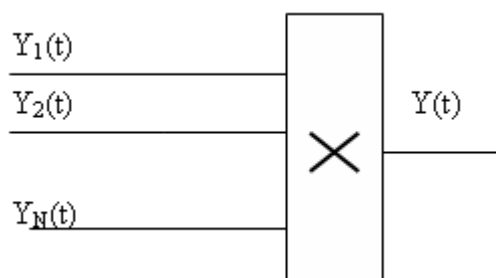


Рис 3.1. Схема информационно-измерительной системы с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов

Как видно из приведенной схемы, значение выходного сигнала системы в целом выражается следующим образом:

$$Y(t) = Y_1(t)Y_2(t) \dots Y_N(t). \quad (3.1)$$

Здесь $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, ..., $Y_N(t)$ – некоторые входные параметры, с которыми функционально связан результат измерения $Y(t)$. Исследование такой системы усложняется тем, что операция, связывающая значения параметров $Y_i(t)$ с выходным значением всей измерительной системы и определяемая выражением (3.1), нелинейна. Дело в том, что математическим аппаратом, используемым для описания свойств ИИС, является теория случайных функций, позволяющая выразить характеристики реакции системы на входное воздействие по известным характеристикам этого входного воздействия, причем в качестве характеристик, согласно выбранной модели измеряемых сигналов, используются математическое ожидание, авто- и взаимокорреляционные функции.

Однако поставленная задача может быть решена совершенно точно лишь в том случае, когда ИИС является линейной системой [24]. Решение

подобной задачи для класса нелинейных систем возможно лишь с некоторыми допущениями и приближениями. В теории вероятности существует теорема о сумме статистических независимых случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения. Согласно этой теореме указанная сумма представляет собой также нормальную случайную величину. Однако нельзя утверждать, что при любом преобразовании нормальной случайной величины всегда получится новая нормальная случайная величина. В частности, произведение двух нормально распределенных случайных величин не является нормальной случайной величиной.

Совместная плотность вероятности двух коррелированных нормальных случайных величин, средние значения которых отличны от нуля, равна:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-x_{01})^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-x_{02})^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(x_1-x_{01})(x_2-x_{02})\right]\right), \quad (3.2)$$

где x_{01}, x_{02} – математические ожидания, σ_1, σ_2 – дисперсии случайных величин x_1, x_2 , ρ – корреляционный момент случайных величин x_1, x_2 .

Выражение плотности вероятности произведения $z=x_1x_2$ двух коррелированных нормальных случайных величин получится, если в (3.2) произвести замену переменной. В работе [25] показано, что плотность вероятности для нормированного произведения, т.е. случайной величины

$$z = \frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

равна:

$$f(z, a_1, a_2; \rho) = I_1(z) - I_2(z),$$

где
$$a_1 = \frac{x_{01}}{\sigma_1}, \quad a_2 = \frac{x_{02}}{\sigma_2},$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[(x_1 - a_1)^2 - 2\rho(x_1 - a_1) \left(\frac{z}{x_1} - a_2 \right) + \left(\frac{z}{x_2} - a_2 \right)^2 \right] \right) \frac{dx_1}{x_1},$$

I_2 – интеграл той же функции, взятый в пределах $(-\infty, 0)$.

Очевидно, что плотность вероятности произведения не всегда соответствует нормальному распределению.

Одним из способов решения проблемы нелинейности системы является ее линеаризация. Любая непрерывная дифференцируемая функция в достаточно узких пределах изменения аргументов может быть приближенно заменена линейной. При этом ошибка, возникающая при линеаризации, тем меньше, чем уже границы изменения аргументов и чем ближе функция к линейной. Ошибка линеаризации, безусловно, влияет на точность конечной математической модели, однако ее величина может быть оценена и отнесена к методической погрешности при использовании модели.

Линеаризации должна подвергнуться функция N переменных:

$$Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) = Y_1 Y_2 \dots Y_N. \quad (3.3)$$

В последнем выражении Y_1, Y_2, \dots, Y_N – случайные величины, представляющие собой значения случайных функций $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)$ в некоторый произвольный момент времени. Сделать переход от выражения (3.1) к выражению (3.3) позволяет сделанное ранее допущение о том, что сигналы $Y_i(t)$ являются стационарными случайными процессами.

Линеаризация функции $Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ в выражении (3.3) может быть проведена путем ее разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $M(M_1, M_2, \dots, M_N)$, где M_1, M_2, \dots, M_N - математические ожидания случайных величин Y_1, Y_2, \dots, Y_N , с сохранением в разложении лишь членов первого порядка:

$$Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \approx Y(M_1, M_2, \dots, M_N) + \sum_{i=1}^N Y'_{Y_i}(M_1, M_2, \dots, M_N)(Y_i - M_i), \quad (3.4)$$

где $\sum_{i=1}^N Y'_{Y_i}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ - значение первой частной производной функции

$Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ по переменной Y_i в точке M .

Подставляя выражение для $Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ из (3.3) в (3.4), получим:

$$\begin{aligned} Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \approx & M_1 M_2 \dots M_N + M_2 M_3 \dots M_N (Y_1 - M_1) + M_1 M_3 \dots M_N (Y_2 - M_2) + \dots \\ & + M_1 M_2 \dots M_{N-1} (Y_N - M_N) = \sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j Y_i - (N-1) \prod_{i=1}^N M_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) представляет собой линеаризованную в окрестности точки M функцию $Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, и именно это выражение мы будем использовать в дальнейшем для анализа информационно-измерительной системы. Таким образом, мультипликативное взаимодействие каналов в системе заменено на аддитивное, и обобщенная структура линеаризованной информационно-измерительной системы представлена на рис. 3.2.

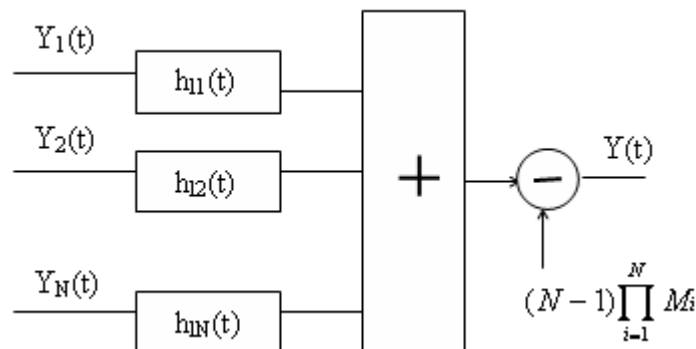


Рис 3.2. Схема линеаризованной измерительной системы с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов

Из схемы видно, что замена мультипликативного взаимодействия каналов в рамках информационно-измерительной системы на аддитивное сопровождается появлением в структуре каждого канала дополнительного звена, характеризующегося весовой функцией $h_{li}(t)$ [26]. Весовая функция линейного динамического объекта позволяет выразить реакцию этого объекта $Y(t)$ на некоторое входное воздействие $X(t)$:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t X(\nu)h(t - \nu)d\nu.$$

Как следует из выражения (3.5), для любого канала системы весовая функция $h_{li}(t)$ дополнительно появляющегося звена определяется следующим образом:

$$h_{li}(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j \delta(t), \quad (3.6)$$

где $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ - функция Дирака.

Введя обозначение

$$A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j, \quad (3.7)$$

можно упрощенно записать выражение (3.6) в виде:

$$h_{li}(t) = A_i \delta(t). \quad (3.8)$$

Необходимо отметить также появление в структуре системы на рис.3.2 аддитивно накладывающегося сигнала $(N - 1) \prod_{i=1}^N M_j$. Его отсутствие в схеме

приводит к тому, что реакция линеаризованной системы на некоторое совокупное входное воздействие $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)$ будет отличаться по математическому ожиданию от реакции исходной системы (рис.3.1) на такое же воздействие на величину этого сигнала.

3.2. Погрешность линеаризации информационно-измерительной

системы

Применимость приведенного выше метода линеаризации может вызывать сомнения в связи с тем, что диапазон изменения случайных аргументов не настолько мал, чтобы в его пределах функция могла быть с достаточной точностью линеаризована. Оценку погрешности, вносимой операцией линеаризации, можно осуществить, сохранив в разложении функции не только линейные члены, но и некоторые члены более высокого порядка. Погрешность линеаризации в таком случае будет выражаться как разность характеристик случайной функции, полученных при ее разложении в ряд Тейлора с несколькими членами и разложении только с линейными членами. При этом будем считать, что аргументы функции распределены по закону, близкому к нормальному.

Разлагая функцию

$$Y = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (3.9)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $M (M_1, M_2, \dots, M_N)$ и сохраняя в разложении члены не выше второго порядка, имеем приближенно:

$$Y = f(M_{Y_1}, M_{Y_2}, \dots, M_{Y_N}) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial Y_i} \right)_M (Y_i - M_{Y_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i^2} \right)_M (Y_i - M_{Y_i})^2 +$$

Применяя к формуле (3.10) операцию математического ожидания, имеем:

$$M_Y = f \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i \partial Y_j} \right)_M (M_{Y_i} M_{Y_j} - M_{Y_i Y_j}) + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i \partial Y_j} \right)_M K_{ij}, \quad (3.11)$$

где K_{ij} - корреляционный момент величин Y_i, Y_j . Рассматривая случай, когда величины Y_i и Y_j некоррелированы между собой, ошибкой линеаризации можно принять второе слагаемое формулы (3.11). Однако, приняв во внимание вид линеаризуемой функции, можно утверждать, что линеаризация не изменяет математического ожидания функции. Действительно, для функции $Y = Y_1 Y_2 \dots Y_N$ вторая частная производная по любому из аргументов равна нулю, следовательно, в нуль будет обращаться и второе слагаемое формулы (3.11).

Посмотрим, как влияет линеаризация на дисперсию случайной величины Y . Как показано в [24], в случае некоррелированных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_N дисперсия функции случайных аргументов равна:

$$D_Y = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial Y_i} \right)_M^2 D_{Y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i^2} \right)_M D_{Y_i}^2 + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i \partial Y_j} \right)_M^2 D_{Y_i} D_{Y_j} \quad (3.12)$$

Два последних слагаемых представляют собой поправку на нелинейность функции. Для исследуемой функции (3.1), как уже было отмечено выше, второе слагаемое обращается в нуль. Таким образом, рассчитав значение третьего слагаемого в выражении (3.12), мы получим погрешность по дисперсии, вносимую при линеаризации функции

$$\Delta_D = \sum_{i < j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N M_{Y_k}^2 D_{Y_i} D_{Y_j} \quad (3.13)$$

разложением в ряд Тейлора.

Однако оценивать величину погрешности линеаризации, которая при таком подходе становится методической составляющей систематической погрешности измерений, удобнее не по величине Δ_D из выражения (3.13), а по относительной погрешности линеаризации, которая позволяет соотнести величину погрешности линеаризации по дисперсии с величиной дисперсии случайной величины Y .

$$\delta_D = \frac{\Delta_D}{D_Y} \quad (3.14)$$

Графики зависимости относительной погрешности линеаризации δ_D от параметров (математического ожидания, дисперсии) перемножаемых сигналов приведены на рисунке 3.3.

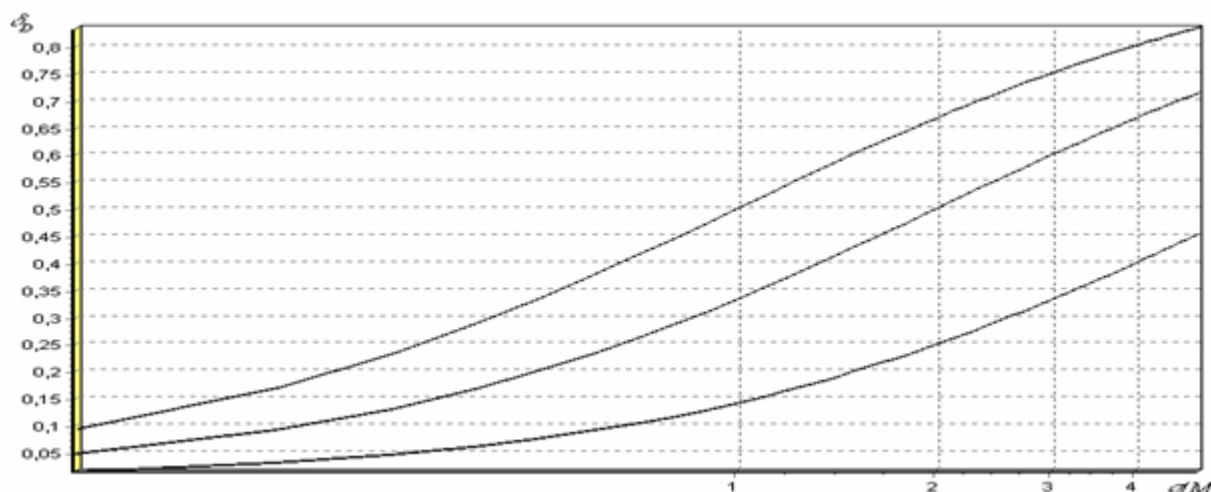


Рис.3.3. Зависимость относительной погрешности линеаризации от параметров перемножаемых сигналов

Анализ графиков подтверждает сделанное ранее утверждение о том, что погрешность линеаризации уменьшается с уменьшением границ изменения аргументов линеаризуемой функции, которые однозначно определяются дисперсией перемножаемых сигналов. Чем меньше

отношение среднеквадратичного отклонения сигнала к его математическому ожиданию, тем меньше становится относительная погрешность линеаризации. Анализ свойств промышленных сигналов в условиях установившихся режимов технологических процессов производства морфолина на ОАО «Волжский оргсинтез» [10] показал, что эти сигналы характеризуются небольшими колебаниями относительно математического ожидания (не более 10 %). Таким образом, полученные математические модели, основанные на линеаризации ИИС, можно обоснованно применять на практике.

Приведенный выше способ линеаризации рассматривает величину Y как функцию нескольких случайных величин Y_1, Y_2, \dots, Y_N , однако на практике входные величины ИИС непрерывно изменяются во времени и потому представляют собой случайные функции, что отражено в выражении (3.1).

Учитывая, что линеаризуемая нами операция перемножения, является безынерционной, то есть значение величины на выходе функционального блока на рис 3.1 зависит только от мгновенных значений входных величин и не зависит от их значений в предшествующие или последующие моменты времени, а также принимая во внимание тот факт, что сечение случайной функции в некоторый момент времени t представляет собой обычную случайную величину, линеаризацию функции от случайных функций, приведенную выше, следует признать возможной.

3.3. Математическое описание формирования погрешности в обобщенной информационно-измерительной системе, содержащей мультипликативную нелинейность

Формальное описание процедуры измерения должно основываться на уравнении измерений. В работе [4] приведены наиболее часто используемые в исследованиях уравнения измерений, отличающиеся друг от друга по степени детализации описания измерительного алгоритма. С учетом того, что исследуемые ИИС включают в себя процессорные средства, за основу описания измерительной процедуры было принято следующее уравнение

$$\lambda^* = R_2 K_1 R_1 \gamma, \quad (3.15)$$

где R_1 -преобразования, выполняемые в аналоговой форме, K_1 -операция дискретизации сигнала, R_2 -преобразования, выполняемые в цифровой форме, γ -входное воздействие. Погрешность измерения будем рассматривать как разность между значением технико-экономического показателя, измеренного реальной (исследуемой) ИИС и идеальной (гипотетической) ИИС. Различия между реальной и идеальной системами заключаются в том, что в идеальной системе отсутствуют аналогово-цифровые и цифро-аналоговые преобразования измеряемых сигналов, а сами сигналы не подвержены воздействию помех. Таким образом, в идеальной системе над измеряемыми сигналами производятся лишь желаемые непрерывные преобразования, необходимые для формирования конечного измеренного значения. Схема выделения погрешности измерения технико-экономических показателей с учетом линеаризации системы, проведенной на рис.3.1, представлена на рис.3.4.

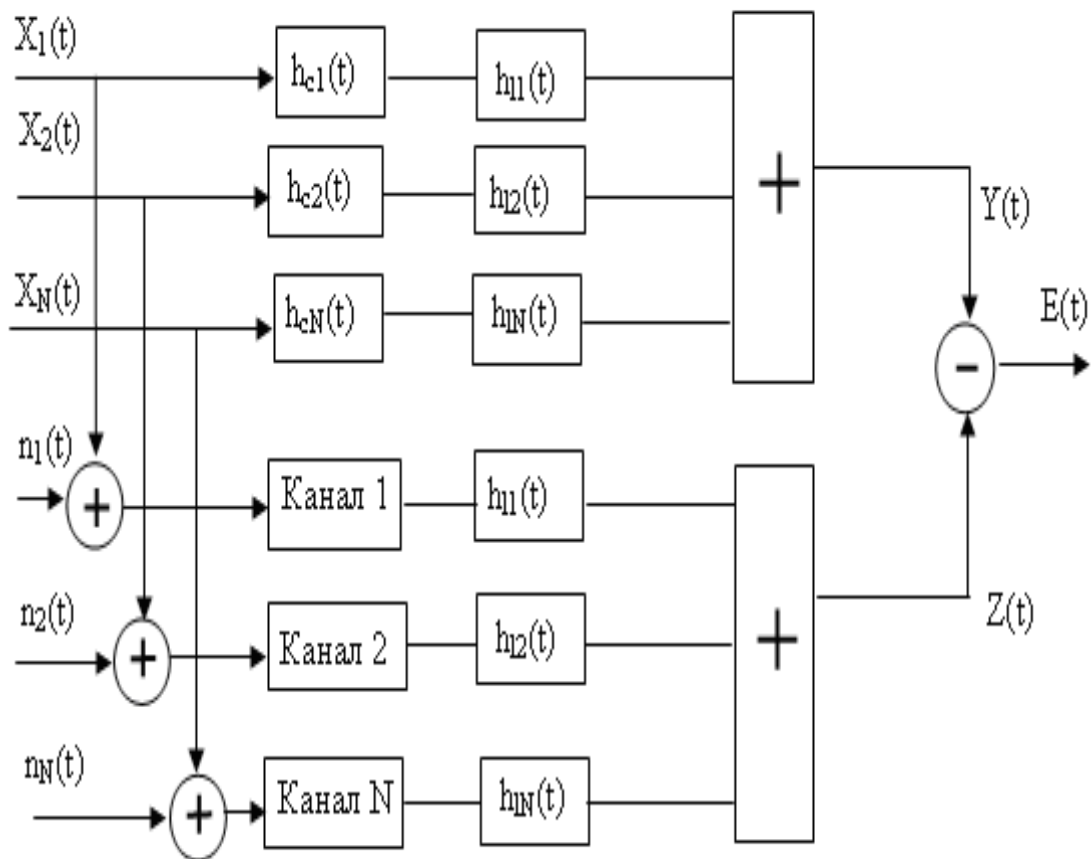


Рис.3.4. Схема формирования погрешности измерения информации в линеаризованной ИИС, содержащей мультипликативные связи между измерительными каналами

На этой схеме $X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)$ - измеряемые сигналы, $n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)$ - помехи, аддитивно накладывающиеся на полезный сигнал в каждом из каналов, $h_{11}(t), h_{12}(t), \dots, h_{1N}(t)$ - весовые функции дополнительных звеньев, появляющихся в структуре каналов вследствие операции линеаризации (см. выражение (3.8)), $h_{c1}(t), h_{c2}(t), \dots, h_{cN}(t)$ - весовые функции идеальных каналов. Как уже было отмечено, погрешность измерения представляет собой функцию $E(t)$, определяемую как разность между значениями технико-экономического показателя, измеренного реальной и идеальной ИИС:

$$E(t) = Z(t) - Y(t). \quad (3.16)$$

При этом необходимо отметить, что в (3.16) результат измерения

значения показателя рассматривается как непрерывная функция времени, то есть уравнение измерений (3.15) должно выглядеть следующим образом:

$$\lambda = K_2 R_2 K_1 R_1 \gamma, \quad (3.17)$$

где K_2 - операция восстановления сигнала из дискретной в аналоговую форму. Таким образом, погрешность измерений $E(t)$ в (3.16) характеризует отличие восстановленного значения показателя от его истинного значения в данный момент времени t . С точки зрения оценки текущего значения измеряемой величины операция восстановления, очевидно, не требуется, и погрешность измерения можно вычислить как разность между оцифрованным значением величины и ее истинным значением. Однако, восстанавливая значения измеряемой величины между моментами дискретизации и сравнивая их с истинными значениями, мы можем оценить те потери полезной информации, которые возникают вследствие ее оцифровки. В реальных системах восстановление непрерывного сообщения может не производиться, поскольку хранение, регистрация и обработка информации в настоящее время рассчитаны на цифровое представление, но возможность такого восстановления подразумевается и должна быть гарантирована. Гарантируемая погрешность восстановления (с учетом всех составляющих, вносимых различными звеньями системы) является основным метрологическим показателем качества системы.

Действительно, параметры современных АЦП (быстродействие, разрядность) позволяют обеспечить такую скорость дискретизации, которая многократно превышает скорость изменения технологических параметров, подвергающихся измерению. Однако, учитывая тот факт, что в ИИС обрабатывается не каждое оцифрованное в АЦП значение входного воздействия, за период дискретизации прием тот промежуток времени, через который ИИС обращается к АЦП. Такой подход к дискретизации тем

более оправдан, если учесть, что большинство информационных подсистем современных АСУТП сохраняют измеренные значения в базах данных; и период обращения к датчикам в таком случае можно назвать также периодом сохранения измеренного значения в базе данных. Тогда погрешность, определенная в (3.16), отражает несоответствие значения измеренного параметра в произвольный момент времени t , воссозданного по содержимому базы данных, его истинному значению в этот момент времени.

Так как и входное воздействие системы, и ее реакция являются случайными функциями, то очевиден вывод о том, что и функция ошибки $E(t)$ также является случайной функцией. Для того, чтобы оценить погрешность, необходимо вычислить характеристики случайной функции $E(t)$.

Математическое ожидание функции ошибки равно:

$$M_E(t) = M\{E(t)\} = M_Z(t) - M_Y(t)$$

Дисперсия по определению равна:

$$\begin{aligned} D_E(t) &= M\{(E(t) - M_E(t))^2\} = M\{((Z(t) - Y(t)) - (M_Z(t) - M_Y(t)))^2\} = \\ &= M\{(Z(t) - M_Z(t) - (Y(t) - M_Y(t)))^2\} = M\{(Z(t) - M_Z(t))^2\} - \\ &\quad - 2M\{(Z(t) - M_Z(t))(Y(t) - M_Y(t))\} + M\{(Y(t) - M_Y(t))^2\} = \\ &= D_Z(t) - 2K_{ZY}(t, t) + D_Y(t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $D_E(t)$ и $M_E(t)$ – дисперсия и математическое ожидание функции ошибки $E(t)$, $D_Z(t)$ и $M_Z(t)$ – дисперсия и математическое ожидание сигнала на выходе реальной системы $Z(t)$, $D_Y(t)$ и $M_Y(t)$ – дисперсия и математическое ожидание сигнала на выходе идеальной системы $Y(t)$, $K_{ZY}(t_1, t_2)$ – корреляционная функция сигналов на выходе идеальной и реальной систем.

Выразим сигнал на выходе идеальной системы $Y(t)$ как функцию от входных сигналов $X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)$. Сигнал на выходе каждого из каналов, входящих в состав идеальной ИИС, равен:

$$Y_i(t) = \int_{-\infty}^t X_i(\nu) h_i(t - \nu) d\nu, \quad (3.19)$$

где $h_i(t)$ – весовая функция i -го идеального канала. В том случае, когда канал состоит из нескольких последовательно соединенных звеньев, его весовая функция равна свертке весовых функций составляющих его звеньев. Для каналов, входящих в состав идеальной ИИС, имеем:

$$h_i(t) = h_{ci}(t) * h_{li}(t) \quad (3.20)$$

Учитывая, что сигнал на выходе идеальной системы $Y(t)$ есть сумма сигналов на выходе каждого из N каналов, из выражения (2.19) следует:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t X_i(\nu) h_i(t - \nu) d\nu. \quad (3.21)$$

Математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ по определению равно:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M\{Y(t)\} = M\left\{\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t X_i(\nu) h_i(t - \nu) d\nu\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t h_i(t - \nu) M\{X_i(\nu)\} d\nu = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t h_i(t - \nu) M_{X_i}(\nu) d\nu \end{aligned} \quad (3.22)$$

Найдем дисперсию функции $Y(t)$, которая представляет собой третье слагаемое в выражении (3.18) D_Y :

$$\begin{aligned} D_Y(t) &= M\{(Y(t) - M_Y(t))(Y(t) - M_Y(t))\} = \\ &= M\left\{\left(\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t X_i(\nu) h_i(t - \nu) d\nu - M_Y(t)\right)\left(\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^t X_j(\mu) h_j(t - \mu) d\mu - M_Y(t)\right)\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_i(t-\nu) h_j(t-\mu) K_{X_i X_j}(\mu-\nu) d\mu d\nu = |\mathcal{G} = \mu - \nu| = \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_i X_j}(\mathcal{G}) \int_{-\infty}^t h_i(t-\nu) h_j(t-\nu-\mathcal{G}) d\nu d\mathcal{G} = |\eta = t - \nu| = \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_i X_j}(\mathcal{G}) \int_0^{\infty} h_i(\eta) h_j(\eta - \mathcal{G}) d\eta d\mathcal{G} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_i X_j}(\mathcal{G}) R_{ij}(-\mathcal{G}) d\mathcal{G},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где

$$R_{ij}(t) = \int_0^{\infty} h_i(\nu) h_j(\nu+t) d\nu \tag{3.24}$$

корреляционная функция весовых функций i -го и j -го каналов, а $K_{X_i X_j}(t)$ - корреляционная функция случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Из выражения (3.23) следует, что функция $Y(t)$ при стационарности входных сигналов системы является стационарным по дисперсии, так как дисперсия D_Y не является функцией времени.

Для того, чтобы выразить сигнал на выходе реального канала $Z(t)$, необходимо раскрыть структуру каналов реальной системы в схеме на рис.3.4. Обобщенная структурная схема программно-аппаратного информационно-измерительного канала, изображенная на рис.3.5, включает в себя аналоговую часть, характеризующуюся эквивалентной весовой функцией $h_{ai}(t)$, блок дискретизации измеряемого сигнала и цифровую часть, весовую функцию которой обозначим $h_{di}^*(n)$, а также восстанавливающий элемент, преобразующий сигнал из цифровой формы в аналоговую, весовую функцию которого обозначим $h_r(t)$. В отличие от идеального канала, на вход реального поступает не измеряемый полезный сигнал $X_i(t)$, а сигнал, искаженный аддитивно наложенной помехой $X_{ai}(t) = X_i(t) + n_i(t)$.

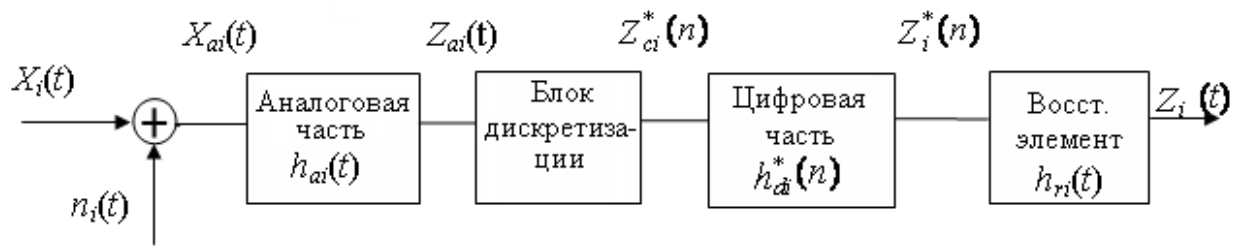


Рис.3.5. Обобщенная структура типового программно-аппаратного канала в составе реальной ИИС

Опишем основные преобразования, которым последовательно подвергается в канале измеряемый сигнал. Аналоговая часть преобразует входной сигнал $X_{ai}(t)$ в сигнал $Z_{ai}(t)$, который равен:

$$Z_{ai}(t) = \int_{-\infty}^t X_{ai}(v) h_{ai}(t-v) dv \quad (3.25)$$

В результате аналого-цифрового преобразования получаем дискретный сигнал:

$$Z_{ci}^*(n) = Z_{ai}(nT_s), \quad (3.26)$$

где T_s – период опроса датчиков. Операция аналого-цифрового преобразования предполагает выполнение над сигналом двух операций: квантования по уровню и дискретизации по времени. Модель блока дискретизации, учитывающая обе эти операции, была использована при исследовании ИИС в работе [19]. Эта модель помимо периода дискретизации T_s учитывает шаг квантования по уровню:

$$Z_{ci}^*(n) = Z_{ai}(nT_s) + E_q(nT_s),$$

где $E_q(t)$ - ошибка квантования по уровню. Однако анализ модели процесса формирования погрешности, построенной с учетом погрешности от квантования по уровню, показал, что высокая разрядность современных АЦП позволяет не учитывать этот параметр при моделировании операций

аналого-цифрового преобразования. Расчеты показали, что для АЦП, которые входят в состав промышленного микроконтроллера Ломиконт, влияние погрешности от квантования по уровню в общей погрешности цифровой обработки информации составляет порядка 2-3%. В связи с этим, чтобы не усложнять результирующую модель, в (3.26) была учтена лишь дискретизация по времени.

Сигнал на выходе цифровой части канала будет равен свертке сигнала $Z_{ci}^*(n)$ с весовой функцией цифровой части канала:

$$Z_i^*(n) = \sum_{k=-\infty}^n Z_{ci}^*(k) h_{di}^*(n-k). \quad (3.27)$$

Последним этапом преобразования сигнала в информационном канале является его восстановление из цифровой формы в аналоговую:

$$Z_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{E[t/T_s]} Z_i^*(n) h_r(t-nT_s),$$

где $E[\]$ – операция взятия целой части значения.

Объединив выражения (3.25)-(3.27), получим реакцию канала $Z_i(t)$ на входное воздействие $X_{ai}(t)$:

$$Z_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{k=-\infty}^n \int_{-\infty}^{kT_s} X_{ai}(v) h_{ai}(kT_s-v) dv h_{di}^*(n-k) h_r(t-nT_s) \quad (3.28)$$

Для информационно-измерительного канала выражение (3.28) представляет собой результат измерения некоторого технологического параметра. В случае комплексных измерительных систем, подобных исследуемой, формирование значения измеряемого системой параметра связано с рядом дополнительных преобразований сигналов, обусловленных необходимостью учета взаимосвязей между каналами в

рамках ИИС. Из схемы на рис.3.4 видно, что в исследуемой ИИС результат измерения в каждом из каналов $Z_i(t)$ должен быть пропущен через звено с весовой функцией, определенной в выражении (3.8). Таким образом, суммированию будут подвергнуты не измеренные каналом сигналы $Z_i(t)$, а сигналы $Z_{ui}(t)$, которые с учетом выражения (3.8) равны:

$$Z_{ui}(t) = \int_{-\infty}^t Z_i(v) A_i \delta(t-v) dv = A_i Z_i(t). \quad (3.29)$$

Формирование значения измеряемого технико-экономического показателя в исследуемой ИИС связано с перемножением значений технологических параметров, измеряемых в отдельных каналах. Линеаризация операции умножения позволила осуществить переход к суммированию сигналов, измеренных каналами. Поэтому значение сигнала на выходе реальной ИИС можно выразить следующим образом:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^N Z_{ui}(t). \quad (3.30)$$

Учитывая выражения (3.28) и (3.29), можно переписать выражение (3.30) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{n=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{k=-\infty}^n Z_{ci}^*(k) h_{di}^*(n-k) h_r(t-nT_s) = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} Z_{ci}^*(k) \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{di}^*(n-k) h_r(t-nT_s) = |l=n-k| = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} Z_{ci}^*(k) \sum_{l=0}^{E[t/T_s]-k} h_{di}^*(l) h_r(t-lT_s-kT_s) = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} Z_{ci}^*(k) h_{wi}(t-kT_s) \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$h_{wi}(t) = \sum_{l=0}^{E[t/T_s]} h_{di}^*(l) h_r(t - lT_s) \quad (3.32)$$

есть эквивалентная весовая функция цифровой части i -го канала и восстанавливающего элемента.

Подставляя выражения (3.25) и (3.26) в (3.31), получим окончательное выражение для сигнала на выходе реальной ИИС:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s} X_{ai}(\nu) h_{ai}(kT_s - \nu) d\nu h_{wi}(t - kT_s). \quad (3.33)$$

Математическое ожидание функции $Z(t)$ равно:

$$M_Z(t) = M\{Z(t)\} = \sum_{i=1}^N A_i M_{X_{ai}} \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s} h_{ai}(kT_s - \nu) d\nu h_{wi}(t - kT_s) \quad (3.34)$$

Для того чтобы получить первое слагаемое в выражении для функции ошибки (3.29), необходимо выразить дисперсию сигнала на выходе реальной ИИС, то есть определить дисперсию случайной функции $Z(t)$. По определению:

$$\begin{aligned} D_z(t) &= M\{(Z(t) - M_Z(t))(Z(t) - M_Z(t))\} = \\ &= M\left\{\left(\sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s} X_{ai}(\nu) h_{ai}(kT_s - \nu) d\nu h_{wi}(t - kT_s) - M_Z(t)\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{j=1}^N A_j \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]lT_s} \int_{-\infty}^{lT_s} X_{aj}(\mu) h_{aj}(lT_s - \mu) d\mu h_{wj}(t - lT_s) - M_Z(t)\right)\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wi}(t - kT_s) \sum_{j=1}^N A_j \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wj}(t - lT_s) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{kT_s} \int_{-\infty}^{lT_s} M \{ (X_{ai}(\nu) - M_{X_{ai}})(X_{aj}(\mu) - M_{X_{aj}}) \} h_{ai}(kT_s - \nu) h_{aj}(lT_s - \mu) d\mu d\nu \right) \quad (3.35)$$

Выделим в последнем выражении корреляционную функцию сигналов на входе аналоговой части i -го и j -го каналов:

$$M \{ (X_{ai}(\nu) - M_{X_{ai}})(X_{aj}(\mu) - M_{X_{aj}}) \} = K_{X_{aij}}(\mu - \nu).$$

Тогда выражение (3.35) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} D_z(t) &= \sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wi}(t - kT_s) \sum_{j=1}^N A_j \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wj}(t - lT_s) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{kT_s} \int_{-\infty}^{lT_s} K_{X_{aij}}(\mu - \nu) h_{ai}(kT_s - \nu) h_{aj}(lT_s - \mu) d\mu d\nu = \\ &= |\mu - \nu = \vartheta| = \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) h_{wj}(t - lT_s) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_{aij}}(\vartheta) \int_{-\infty}^{kT_s} h_{ai}(kT_s - \nu) h_{aj}(lT_s - \nu - \vartheta) d\nu d\vartheta = \\ &= |kT_s - \nu = \lambda| = \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) h_{wj}(t - lT_s) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_{aij}}(\vartheta) \int_0^{\infty} h_{ai}(\lambda) h_{aj}(\lambda + lT_s - kT_s - \vartheta) d\nu d\vartheta = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N \sum_{l=-\infty}^{E[t/T_s]} A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) h_{wj}(t - lT_s) \int_{-\infty}^{\infty} K_{X_{aij}}(\vartheta) R_{aij}(lT_s - kT_s - \vartheta) d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$R_{aij}(t) = \int_0^{\infty} h_{ai}(\nu) h_{aj}(\nu + t) d\nu \quad (3.37)$$

корреляционная функция весовых функций аналоговых частей i -го и j -го каналов. Функция $R_{aij}(t)$ позволяет выразить корреляционную функцию сигналов на выходах аналоговой части i -го и j -го каналов по известной корреляционной функции сигналов на входах аналоговой части i -го и j -го каналов:

$$K_{Yaij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Xaij}(v) R_{aij}(t-v) dv \quad (3.38)$$

Произведя в (3.36) замену переменных $m=l-k$, а также учитывая выражение (3.38), имеем:

$$\begin{aligned} D_z(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_i A_j h_{wi}(t-kT_s) h_{wj}(t-mT_s-kT_s) \times K_{Yaij}(mT_s) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N A_i A_j R_{wij}^*(-m, t) K_{Yaij}(mT_s), \end{aligned}$$

где

$$R_{wij}^*(m, t) = \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wi}(t-kT_s) h_{wj}(t+mT_s-kT_s) \quad (3.39)$$

есть корреляционная функция эквивалентных весовых функций $h_{wn}(t)$ i -го и j -го каналов. Функция $R_{wij}^*(m, t)$ является функцией двух аргументов, то есть для ее расчета недостаточно знать номер отсчета m , а необходимо также знать текущее время t . Это связано с тем, что время t в выражении (3.39) в общем случае не кратно периоду дискретизации T_s , а, следовательно, и аргументы весовых функций $h_{wn}(t)$ не укладываются в целое число отсчетов периода опроса датчиков и не могут быть определены выражением вида nT_s , где n - некоторое целое число. Таким образом, второй аргумент функции $R_{wij}^*(m, t)$ позволяет учесть значения весовых функций $h_{wi}(t)$ и $h_{wj}(t)$ в моменты времени, которые определяются выражением $t_k=t-kT_s$ (очевидно, не

кратные T_s), причем превышение каждого из этих моментов времени над k -ым отсчетом составляет

$$\tau = t - E[t/T_s]T_s.$$

Окончательно выражение для дисперсии сигнала на выходе реальной ИИС примет следующий вид:

$$D_z(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N A_i A_j R_{wij}^*(-m, t) K_{Yaij}(mT_s) \quad (3.40)$$

Для того чтобы получить полное выражение для дисперсии функции ошибки измерения исследуемой ИИС, необходимо выразить значение взаимной корреляционной функции сигналов на выходах реальной и идеальной ИИС:

$$\begin{aligned} K_{ZY}(t, t) &= M\{(Z(t) - M_Z(t))(Y(t) - M_Y(t))\} = M\left\{\left(\sum_{i=1}^N A_i \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s} X_{ai}(v) h_{ai}(kT_s - v) dv \times \right. \right. \\ &\times h_{wi}(t - kT_s) \left. \left(\sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^t X_j(\mu) h_{gj}(t - \mu) d\mu - M_Y(t) \right)\right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{kT_s} \int_{-\infty}^t M\{X_{ai}(v) - M_{Xai}\} (X_j(\mu) - M_{Xj}) \} h_{ai}(kT_s - v) h_{gj}(t - \mu) d\mu dv \quad (3.41) \end{aligned}$$

Выделим в последнем выражении корреляционную функцию входного сигнала i -го канала $X_{ai}(t)$ и измеряемого сигнала в j -ом канале $X_j(t)$:

$$M\{(X_{ai}(v) - M_{Xai})(X_j(\mu) - M_{Xj})\} = K_{XaiXj}(\mu - v)$$

Выразить корреляционную функцию $K_{XaiXj}(t)$ через корреляционные функции измеряемых сигналов и корреляционные функции помех, накладывающихся на полезный сигнал, можно, задавшись типом помехи:

определив, например, является ли помеха коррелированной или она представляет собой “белый шум”.

Таким образом, выражение (3.41) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 K_{ZY}(t, t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{kT_s} \int_{-\infty}^t K_{XaiXj}(\mu - \nu) h_{ai}(kT_s - \nu) h_{gj}(t - \mu) d\mu d\nu = |\mathcal{G} = \mu - \nu| = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) \int_{-\infty}^{\infty} K_{XaiXj}(\mathcal{G}) \int_{-\infty}^{kT_s} h_{ai}(kT_s - \nu) h_{gj}(t - \nu - \mathcal{G}) d\mu d\mathcal{G} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) \int_{-\infty}^{\infty} K_{XaiXj}(\mathcal{G}) R_{aigj}(t - kT_s - \mathcal{G}) d\mathcal{G},
 \end{aligned}$$

где $R_{aigj}(t) = \int_0^{\infty} h_{ai}(\nu) h_{gj}(\nu + t) d\nu$ есть корреляционная функция весовых функций аналоговой части i -го канала реальной ИИС и весовой функции j -го канала идеальной ИИС.

Учитывая, что взаимная корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части i -го канала реальной ИИС $Y_{ai}(t)$ и сигнала на выходе j -го канала идеальной ИИС $Y_j(t)$ выражается следующим образом:

$$K_{YaiYj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{XaiXj}(\mathcal{G}) R_{aigj}(t - \mathcal{G}) d\mathcal{G},$$

то выражение для $K_{ZY}(0)$ можно окончательно представить в виде:

$$K_{ZY}(t, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{j=1}^N A_i A_j h_{wi}(t - kT_s) K_{YaiYj}(t - kT_s) \quad (3.42)$$

Из последнего выражения очевидно, что, как и в случае дисперсии сигнала на выходе реальной ИИС D_z , корреляционная функция $K_{ZY}(t, 0)$

является нестационарной, то есть зависит от момента времени t , в который она была рассчитана.

Теперь можно выразить основные характеристики функции ошибки обработки информации в ИИС. Математическое ожидание равно:

$$M_E(t) = \sum_{i=1}^N A_i M_{X_{ai}} \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s - \nu} h_{ai}(kT_s - \nu) d\nu h_{wi}(t - kT_s) - \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t h_i(t - \nu) M_{X_i}(\nu) d\nu \quad (3.43)$$

Подставляя выражения (3.23), (3.40) и (3.42) в (3.18), получаем общее выражение для дисперсии функции ошибки измерения в ИИС:

$$D_E(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_{X_i X_j}(\lambda) R_{ij}(-\lambda) d\lambda + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_i A_j R_{wij}^*(-m, t) K_{Y_{aij}}(m T_s) + \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} A_i A_j h_{wi}(t - k T_s) K_{Y_{aij}}(t - k T_s) \right) \quad (3.44)$$

Таким образом, для того чтобы рассчитать характеристики функции ошибки, необходимо знать параметры входных сигналов системы, характер и параметры воздействующих на систему помех, а также структурные параметры самой ИИС. При этом в качестве критерия точности работы исследуемой ИИС рекомендуется использовать не саму величину $D_E(t)$, а функционально связанную с ней относительную дисперсию ошибки, которая выражается следующим образом:

$$\Theta(t) = \frac{D_E(t)}{D_Y} \quad (3.45)$$

Величина относительной погрешности позволяет соотнести дисперсию функции ошибки с дисперсией измеряемой величины [27]. Таким образом:

1. Информационно-измерительная система с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов относится к классу нелинейных

систем. ИИС может быть линеаризована разложением в ряд Тейлора функции, реализуемой системой, с сохранением в разложении лишь членов первого порядка. Погрешность линеаризации можно оценить, сохранив в разложении члены второго порядка и сравнив параметры полученной функции с линеаризованной. Погрешность линеаризации убывает с уменьшением дисперсий измеряемых сигналов, в связи с чем рекомендуется использовать разработанные модели и методики при небольших колебаниях сигналов относительно математического ожидания.

2. Получены выражения (3.43), (3.44) для характеристик функции ошибки обработки информации в обобщенной ИИС с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов $E(t)$.

3. Выходной сигнал ИИС даже при воздействии на нее стационарных случайных процессов является нестационарным по корреляционной функции. Значение математического ожидания и корреляционной функции на выходе ИИС зависит от времени, а точнее – от параметра τ , характеризующего несовпадение текущего момента времени с моментом дискретизации.

4. В качестве критерия оптимизации при параметрическом синтезе ИИС можно использовать относительную дисперсию случайной функции ошибки, которая также является нестационарным случайным процессом. Методика параметрического синтеза ИИС, использующая в качестве критерия оптимизации относительную дисперсию случайной функции ошибки, представлена в работе [10].

5. Использованный подход к исследованию свойств ИИС можно обобщить на класс нелинейных ИИС. Главным требованием к системе является непрерывность и дифференцируемость функции, реализуемой ею для формирования значения измеряемой величины.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ.....	68
3.1. Линеаризация информационно-измерительной системы.....	69
3.2. Погрешность линеаризации информационно-измерительной системы.....	75
3.3. Математическое описание формирования погрешности в обобщенной информационно-измерительной системе, содержащей мультипликативную нелинейность.....	78

90

Глава 4

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТЕЙШЕГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КАНАЛА В АСУ ВОДОСНАБЖЕНИЕМ РЫБОВОДНОГО КОМПЛЕКСА

Структура всех измерительных каналов в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса имеет вид последовательного соединения типовых измерительных преобразователей (рис. 1.1, гл.2.) . Там же был обоснован выбор вариантов алгоритмов цифровой обработки измерительной информации. Как было показано в [7], математической моделью компонента измерительного канала, адекватной решаемой задаче, является оператор свертки, ядром которого является импульсная переходная характеристика (весовая функция). Определим общий вид весовых функций измерительных преобразователей и алгоритмов цифровой обработки измерительной информации в типовом измерительном канале в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса, структурная схема которого будет рассмотрена ниже.

4.1. Математические модели отдельных компонентов интеллектуального измерительного канала

Как известно [28], в статическом режиме работы выходным сигналом первичного преобразователя (датчика) является величина

$$y = F(x),$$

где x – измеряемая величина, $F(x)$ – номинальная статическая (градуировочная) характеристика датчика. Для используемых в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса датчиков расхода, давления, уровня, содержания кислорода и показателя рН воды характерна линейная зависимость

$$y = ax + b.$$

Датчики температуры имеют нелинейную статическую характеристику, заданную в виде градуировочной таблицы, где для значений y_i ($i=1, 2, \dots, m$) выписаны соответствующие им значения x_i . В этом случае статическая характеристика может быть аппроксимирована при помощи полинома степени n вида

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i .$$

Аппроксимацию $F(x)$, заданной в виде таблицы, можно производить различными способами. Как правило, функциональная зависимость $F(x)$ аппроксимируется полиномом наилучшего (равномерного) приближения $P_n(x)$. Степень n полинома выбирается так, чтобы $|F(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$, причем наиболее удобным является представление $P_n(x)$ в виде схемы Горнера.

Таким образом, в общем случае датчик является нелинейным элементом. Однако в диапазоне изменения измеряемой величины, под которым при случайных моделях сигнала понимают интервал изменения величины при условии, что вероятность ее попадания в этот интервал не менее заданной, статическая характеристика первичного преобразователя может быть с достаточной точностью линеаризована.

Так, например, для линеаризации статической характеристики вида

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

представляющей собой полином второй степени (такую статическую характеристику имеют в частности используемые в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса датчики температуры - термометры сопротивления), удобно воспользоваться разложением исходной функции в ряд Тейлора:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

где $F^n(x_0)$ - производная n - го порядка функции $F(x)$ в точке x_0 .

Ограничивая разложение двумя первыми членами ряда, а также принимая за точку разложения математическое ожидание m_x измеряемого сигнала x (в случае, если математическое ожидание зависит от времени, то за точку разложения можно принять среднее значение математического ожидания за достаточно длительный интервал времени), получим следующую линейную статическую характеристику:

$$y = (2Am_x + B)x + C - Am_x^2.$$

Кроме того, используемые в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса датчики температуры, являются инерционными элементами, существенно искажающими частотный состав измеряемого сигнала. Инерционные свойства измерительного преобразователя характеризуются его динамической характеристикой. Большинство инерционных датчиков описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 x(t).$$

Будем использовать самую простую и распространенную аппроксимацию динамики датчика в виде апериодического звена:

$$W_p(p) = \frac{1}{T_p p + 1},$$

где T_p – постоянная времени первичного преобразователя.

Таким образом, в качестве обобщенной весовой функции первичного преобразователя, характеризующей его статические и динамические свойства, будем использовать следующую:

$$h_p(t) = \frac{K_p}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}}, \quad (4.1)$$

где K_p – коэффициент усиления первичного преобразователя.

Используемые в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса нормирующие преобразователи, представляют собой линейные безынерционные звенья. Поэтому естественно в качестве обобщенной весовой функции нормирующего преобразователя использовать выражение вида

$$h_n(t) = K_n \delta(t), \quad (4.2)$$

где K_n – коэффициент усиления нормирующего преобразователя, $\delta(t)$ – функция Дирака.

Наличие в структуре программно-аппаратного канала, предназначенного для осуществления прямых измерений, операций преобразования измерительной информации, осуществляемых в первичном и нормирующем преобразователях, требует выполнения обратных преобразований. Учитывая принятую аппроксимацию статических свойств первичных и нормирующих преобразователей линейным усилительным звеном, в качестве весовой функции операции приведения сигнала ко входу будем использовать следующую:

$$h_s^*(n) = \frac{1}{K_n K_p} \delta_0(n), \quad (4.3)$$

$$\text{где } \delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Как показано в первой главе, фильтрацию помехи измерения, присутствующей в полученном от датчика сигнале, целесообразно осуществлять методом экспоненциального сглаживания. В дискретном варианте экспоненциальный фильтр представляет собой рекуррентное соотношение, определяющее текущее значение выходного сигнала $y^*(n)$ фильтра как функцию текущего значения входа $x^*(n)$ и предыдущего значения выхода $y^*(n-1)$

$$y^*(n) = y^*(n-1) + \frac{T_s}{T_f} [x^*(n) - y^*(n-1)], \quad (4.4)$$

где T_s – интервал времени между двумя соседними значениями квантованного по времени входного сигнала фильтра.

Получим весовую функцию цифрового фильтра типа экспоненциального сглаживания. Передаточная функция цифровой модели, описываемой рекуррентным уравнением (4.4), в смысле дискретного преобразования Лапласа имеет вид

$$H_f^*(z) = \frac{D\{y(n)\}}{D\{x(n)\}} = \frac{\frac{T_s}{T_f}}{1 - \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)z} = \frac{\gamma}{1 - \lambda z},$$

где $\gamma = \frac{T_s}{T_f}$, $\lambda = \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)$. Тогда весовая функция цифрового фильтра, определяемая как обратное дискретное преобразование Лапласа от передаточной функции, будет равна:

$$h_f^*(n) = \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n.$$

Весовая функция фильтра, осуществляющего фильтрацию в реальном режиме времени, будет иметь вид:

$$h_f^*(n) = \begin{cases} \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Как было отмечено в первой главе, заданную точность определения измеряемых в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса величин целесообразно обеспечить без необходимости применения специальных алгоритмов экстра- и интерполяции, т. е. путем простейшей, не требующей вычислений ступенчатой экстраполяции.

Весовая функция экстраполятора нулевого порядка является прямоугольным импульсом длительностью T_s и амплитудой, равной 1 (см. рис. 4.1)

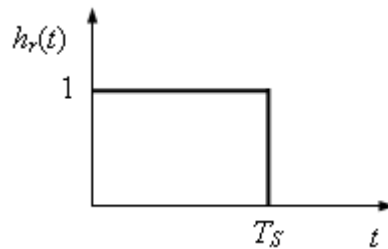


Рис. 4.1. Весовая функции экстраполятора нулевого порядка

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < T_s; \\ 0 & \text{при } t < 0, t \geq T_s. \end{cases} \quad (4.6)$$

4.2. Математическое описание погрешности цифровой обработки измерительной информации

Найдем методическую погрешность определения искомой величины при прямых динамических измерениях, осуществляемых с помощью программно-аппаратного измерительного канала в АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса, структура которого представлена на рисунке 4.2.

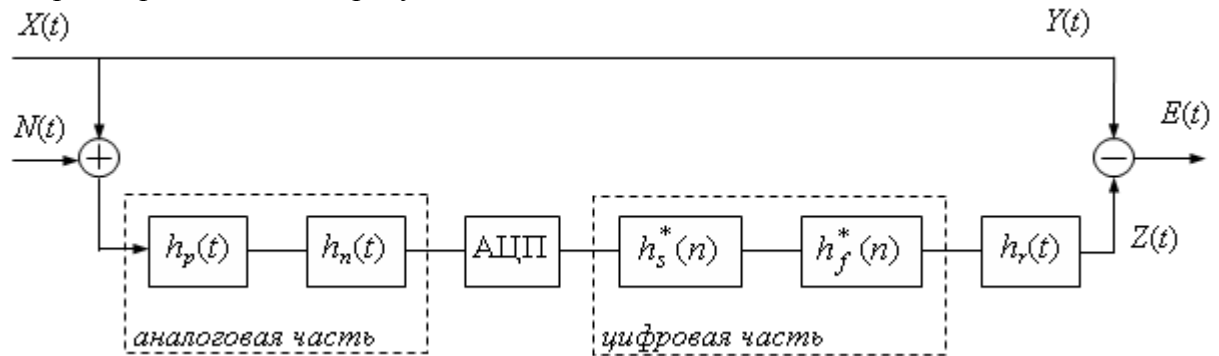


Рис. 4.2. Схема выделения погрешности цифровой обработки измерительной информации в типовом программно-аппаратном канале, предназначенном для прямых динамических измерений

Поскольку при прямых измерениях необходимо определить значение величины, непосредственно измеряемой датчиком, то и результат измерений будем рассматривать по отношению к значению измеряемой величины. Схема выделения погрешности определения искомой величины, в этом случае, будет выглядеть так, как представлено на рис. 4.2 [29]. Расчет погрешности будем осуществлять в соответствии с методикой, изложенной в 2.4.

Эквивалентная весовая функция $h_a(t)$ аналоговой части программно-аппаратного измерительного канала, состоящей из первичного и нормирующего преобразователей, будет равна [см. выражение (2.48)]:

$$h_a(t) = \int_0^t h_p(\mu) h_n(t - \mu) d\mu, \quad (4.7)$$

где $h_p(t)$ - весовая функция первичного преобразователя, $h_n(t)$ - весовая функция нормирующего преобразователя.

После подстановки в (4.7) выражений (4.1) и (4.2), получим:

$$h_a(t) = \int_0^t \frac{K_p}{T_p} e^{-\frac{\mu}{T_p}} K_n \delta(t - \mu) d\mu = \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}}. \quad (4.8)$$

Цифровая часть программно-аппаратного канала состоит из алгоритмов реализации шкалы датчика и цифровой фильтрации.

Эквивалентная весовая функция цифровой части будет равна сумме свертки соответствующих весовых функций [см. выражение (2.49)]:

$$h_d^*(n) = \sum_{k=0}^n h_s^*(k)h_f^*(n-k),$$

где $h_s^*(n)$ - весовая функция алгоритма реализации шкалы датчика, $h_f^*(n)$ - весовая функция цифрового фильтра. После подстановки (4.3) и (4.5) выражение для весовой функции будет иметь вид:

$$h_d^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Чтобы получить эквивалентную весовую функцию цифровой части и восстанавливающего элемента, подставим выражения (4.9) и (4.6) в выражение (2.50). При этом получим:

$$h_w(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{E[t/T_s]} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

или

$$h_w[n, \xi] = \begin{cases} \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n & \text{при } (n + \xi)T_s \geq 0, \\ 0 & \text{при } (n + \xi)T_s < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Поскольку измеряемая величина является искомой величиной (прямые измерения), то весовая функция операции преобразования измеряемой величины в искомую в этом случае равна дельта-функции:

$$h_g(t) = \delta(t). \quad (4.11)$$

Математическое ожидание сигнала на входе программно-аппаратного измерительного канала будет равно:

$$m_g(t) = M\{X(t) + N(t)\} = m_x(t) + m_n(t),$$

где $m_x(t)$ – математическое ожидание измеряемой величины, $m_n(t)$ – математическое ожидание помехи. Анализ реализаций измеряемых параметров в системе водоснабжения рыбоводного комплекса показал, что математические ожидания измеряемых величин не зависят от времени, а математические ожидания помех измерений по каждому из измерительных каналов можно принять равными нулю. Следовательно, математическое

ожидание сигнала на входе типового программно-аппаратного измерительного канала будет равно:

$$m_g = m_x.$$

Тогда, подставив выражения (4.8) и (4.10) в (2.52), найдем математическое ожидание последовательности отсчетов $Z[k, \xi]$ случайного сигнала на выходе программно-аппаратного измерительного канала:

$$m_z(t) = m_x \frac{T_s}{T_p T_f} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu}{T_p}} d\mu = m_x \frac{T_s}{T_f} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n = m_x. \quad (4.12)$$

С учетом выражений (4.11) и (4.12) математическое ожидание последовательности отсчетов $E[k, \xi]$ случайной функции погрешности определения искомой величины будет равно [см. выражение (2.53)]:

$$m_{\xi}^{\xi} = m_x \int_0^{\infty} \delta(\mu) d\mu - m_x = 0. \quad (4.13)$$

Корреляционная функция весовой функции аналоговой части канала, согласно выражению (2.54), равна:

$$R_{aa}(\tau) = \int_0^{\infty} h_a(t) h_a(t + \tau) dt.$$

Учитывая что при $t < 0$ $h_a(t) = 0$, пределы интегрирования в выражении для вычисления $R_{aa}(\tau)$ будут разными при положительных и отрицательных значениях τ :

а) при $\tau \geq 0$

$$R_{aa}(\tau) = \int_0^{\infty} h_a(t) h_a(t + \tau) dt;$$

б) при $\tau < 0$

$$R_{aa}(\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} h_a(t) h_a(t + \tau) dt.$$

Подставив выражение (4.8), соответственно получим:

а) при $\tau \geq 0$

$$R_{aa}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t+\tau}{T_p}} dt = \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} e^{-\frac{\tau}{T_p}};$$

б) при $\tau < 0$

$$R_{aa}(\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t+\tau}{T_p}} dt = \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} e^{-\frac{\tau}{T_p}}.$$

Таким образом, при любом τ

$$R_{aa}(\tau) = \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} e^{-\frac{|\tau|}{T_p}}. \quad (4.14)$$

Корреляционная функция сигнала на входе программно-аппаратного ИК равна:

$$\begin{aligned} K_g(\tau) &= M\{[\dot{X}(t) + \dot{N}(t)][\dot{X}(t+\tau) + \dot{N}(t+\tau)]\} = \\ &= M\{\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)\} + M\{\dot{X}(t)\dot{N}(t+\tau)\} + M\{\dot{N}(t)\dot{X}(t+\tau)\} + M\{\dot{N}(t)\dot{N}(t+\tau)\} = \\ &= K_x(\tau) + K_{xn}(\tau) + K_{nx}(\tau) + K_n(\tau), \end{aligned}$$

где $K_x(\tau)$ – корреляционная функция измеряемой величины, $K_{xn}(\tau)$, $K_{nx}(\tau)$ – взаимные корреляционные функции измеряемой величины и помехи, $K_n(\tau)$ – корреляционная функция помехи. Согласно принятой модели измерительной информации измеряемая величина и помеха некоррелированы между собой, следовательно, их взаимные корреляционные функции равны нулю. Тогда корреляционная функция сигнала на входе программно-аппаратного ИК равна:

$$K_g(\tau) = K_x(\tau) + K_n(\tau).$$

При вычислении корреляционной функции выходного сигнала аналоговой части измерительного канала рассмотрим случай, когда на полезный сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией накладывается помеха типа “белый шум”, и случай, когда корреляционная функция помехи может быть аппроксимирована одной экспонентой.

В случае помехи типа “белый шум” корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части измерительного канала будет равна [см. выражение (2.55)]:

$$\begin{aligned} K_{y_a}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} (D_x e^{-\alpha|t-\lambda|} + S\delta(t-\lambda)) d\lambda = \\ &= \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} \left(D_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\alpha|t-\lambda|} d\lambda + S \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} \delta(t-\lambda) d\lambda \right). \end{aligned}$$

Найдем значение первого интеграла. Для этого рассмотрим два случая.

а) при $t < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\alpha|t-\lambda|} d\lambda &= \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{-\alpha(t-\lambda)} d\lambda + \int_t^0 e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{\alpha(t-\lambda)} d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{\alpha(t-\lambda)} d\lambda = \\ &= \frac{2T_p}{1-(\alpha T_p)^2} (e^{\alpha t} - \alpha T_p e^{\frac{t}{T_p}}); \end{aligned}$$

б) при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\alpha|t-\lambda|} d\lambda &= \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{-\alpha(t-\lambda)} d\lambda + \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{-\alpha(t-\lambda)} d\lambda + \int_t^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{T_p}} e^{\alpha(t-\lambda)} d\lambda = \\ &= \frac{2T_p}{1-(\alpha T_p)^2} (e^{-\alpha t} - \alpha T_p e^{-\frac{t}{T_p}}). \end{aligned}$$

Следовательно, при любом t первый интеграл равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\alpha|t-\lambda|} d\lambda = \frac{2T_p}{1-(\alpha T_p)^2} (e^{-\alpha|t|} - \alpha T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}).$$

Второй интеграл будет равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} \delta(t-\lambda) d\lambda = e^{-\frac{|t|}{T_p}}.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$K_{y_a}(t) = K_p^2 K_n^2 \left(\frac{D_x}{1-(\alpha T_p)^2} (e^{-\alpha|t|} - \alpha T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}) + \frac{S}{2T_p} \cdot e^{-\frac{|t|}{T_p}} \right). \quad (4.15)$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда корреляционная функция помехи может быть аппроксимирована одной экспонентой.

В этом случае корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части интеллектуального измерительного канала будет равна:

$$\begin{aligned}
K_{y_a}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} (D_x e^{-\alpha|t-\lambda|} + D_n e^{-\beta|t-\lambda|}) d\lambda = \\
&= \frac{K_p^2 K_n^2}{2T_p} \left(D_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\alpha|t-\lambda|} d\lambda + D_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda|}{T_p}} e^{-\beta|t-\lambda|} d\lambda \right) = \\
&= K_p^2 K_n^2 \left(\frac{D_x}{1 - (\alpha T_p)^2} (e^{-\alpha|t|} - \alpha T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}) + \frac{D_n}{1 - (\beta T_p)^2} (e^{-\beta|t|} - \beta T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}) \right).
\end{aligned}$$

Обозначив $k = \frac{D_n}{D_x}$, окончательно получим:

$$K_{y_a}(t) = K_p^2 K_n^2 D_x \left(\frac{e^{-\alpha|t|} - \alpha T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{e^{-\beta|t|} - \beta T_p e^{-\frac{|t|}{T_p}}}{1 - (\beta T_p)^2} \right). \quad (4.16)$$

Чтобы получить выражение для корреляционной функции эквивалентной весовой функции цифровой части измерительного канала и восстанавливающего элемента, подставим выражение (4.10) в формулу (2.56). Пределы суммирования в формуле (2.56), в связи с тем, что при $t < 0$ $h_w(t) = 0$, зависят от знака аргумента m .

При $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}
R_{ww}^{\xi}(mT_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^k \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{k+m} = \\
&= \left(\frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \right)^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{2k}$ образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель

прогрессии равен: $z = \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^2$. Так как постоянная времени фильтра T_f всегда больше

интервала дискретизации во времени T_s , то $z < 1$. Следовательно, сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна:

$$S_{\infty} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^2}.$$

Таким образом, получим:

$$R_{ww}^{\xi}(mT_s) = \left(\frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f}\right)^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^m \frac{T_f^2}{T_s(2T_f - T_s)} = \frac{T_s}{K_n^2 K_p^2 (2T_f - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^m.$$

При $m < 0$:

$$\begin{aligned} R_{ww}^{\xi}(mT_s) &= \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^k \frac{1}{K_n K_p} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{k+m} = \\ &= \frac{T_s}{K_n^2 K_p^2 (2T_f - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{-m}. \end{aligned}$$

Сопоставив выражение, полученное для случая $m < 0$, с выражением, имеющим место при $m \geq 0$, можно записать соответствующее выражение при любом m , которое будет иметь следующий вид:

$$R_{ww}^{\xi}(mT_s) = \frac{T_s}{K_n^2 K_p^2 (2T_f - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|m|}. \quad (4.17)$$

Дисперсия последовательности отсчетов $Z[k, \xi]$ случайного сигнала на выходе программно-аппаратного ИК будет различной в случае помехи типа “белый шум” и помехи, корреляционная функция которой может быть аппроксимирована одной экспонентой. Подставив выражения (4.15) и (4.17) в (2.57) получим, что в случае, когда на вход программно-аппаратного измерительного канала воздействует измеряемая величина с аддитивно наложенной помехой типа “белый шум”, дисперсия равна:

$$\begin{aligned} D_z^{\xi} &= K_z^{\xi}(0) = \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \\ &+ \frac{T_s}{2T_f - T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D_x}{1 - (\alpha T_p)^2} (e^{-\alpha|kT_s|} - \alpha T_p e^{-\frac{|kT_s|}{T_p}}) + \frac{S}{2T_p} \cdot e^{-\frac{|kT_s|}{T_p}} \right) \cdot \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} = \\ &= \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \frac{T_s}{2T_f - T_s} \left[\left(\frac{S}{2T_p} - \frac{D_x \alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{T_s}{T_p}|k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{D_x}{(\alpha T_p)^2 - 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha T_s |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} \Bigg].$$

Найдем сумму членов ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{T_s}{T_p} |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|}$, который можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{T_s}{T_p} |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{T_s}{T_p} k} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^k.$$

Члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{T_s}{T_p} k} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^k$ образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель

прогрессии равен: $z = e^{\frac{T_s}{T_p}} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)$. Так как $z < 1$, сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна:

$$S_{\infty} = \frac{e^{\frac{T_s}{T_p}} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)}{1 - e^{\frac{T_s}{T_p}} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)}.$$

Таким образом, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{T_s}{T_p} |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} = 1 + \frac{2e^{\frac{T_s}{T_p}} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)}{1 - e^{\frac{T_s}{T_p}} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)} = \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}.$$

Выполняя аналогичные преобразования, получим, что сумма членов ряда

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha T_s |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|}$ равна:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha T_s |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^{|k|} = \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}.$$

Подставив найденные выражения для сумм, окончательно получим:

$$D_z^\xi = \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \frac{T_s}{2T_f - T_s} \left[\left(\frac{S}{2T_p} - \frac{D_x \alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} \right) \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} + \frac{D_x}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} \right]. \quad (4.18)$$

В случае, когда корреляционная функция помехи, накладывающейся на полезный сигнал, может быть аппроксимирована экспонентой, дисперсия последовательности отсчетов $Z[k, \xi]$ случайного сигнала на выходе программно-аппаратного ИК будет равна:

$$\begin{aligned} D_z^\xi &= \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \\ &+ \frac{T_s D_x}{2T_f - T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha |kT_s|} - \alpha T_p e^{-\frac{|kT_s|}{T_p}}}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{e^{-\beta |kT_s|} - \beta T_p e^{-\frac{|kT_s|}{T_p}}}{1 - (\beta T_p)^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{T_s}{T_f} \right)^{|k|} = \\ &= \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \\ &+ \frac{T_s D_x}{2T_f - T_s} \left[\frac{1}{1 - (\alpha T_p)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha T_s |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f} \right)^{|k|} + \frac{k}{1 - (\beta T_p)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta T_s |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f} \right)^{|k|} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{\beta T_p}{1 - (\beta T_p)^2} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{T_s}{T_p} |k|} \left(1 - \frac{T_s}{T_f} \right)^{|k|} \right]. \end{aligned}$$

После подстановки полученных ранее значений сумм последнее выражение будет равно:

$$\begin{aligned} D_z^\xi &= \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \\ &+ \frac{T_s D_x}{2T_f - T_s} \left[\frac{1}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} + \frac{k}{1 - (\beta T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)} - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{\beta T_p}{1 - (\beta T_p)^2} \right) \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}. \quad (4.19)$$

Взаимную корреляционную функцию эквивалентных весовых функций аналоговой части программно-аппаратного ИК и операции преобразования измеряемой величины в искомую найдем, подставив выражения (4.8) и (4.11) в (2.58):

$$R_{ag}(t) = \int_0^{\infty} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{\mu}{T_p}} \delta(\mu + t) d\mu.$$

Откуда непосредственно следует:

$$R_{ag}(t) = \begin{cases} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Взаимная корреляционная функция сигнала на входе измерительного канала и измеряемой величины равна:

$$\begin{aligned} K_{gx}(\tau) &= M \{ [\dot{X}(t) + \dot{N}(t)] \dot{X}(t + \tau) \} = M \{ \dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau) \} + M \{ \dot{N}(t) \dot{X}(t + \tau) \} = \\ &= K_x(\tau) + K_{nx}(\tau) = K_x(\tau). \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить взаимную корреляционную функцию сигнала на выходе аналоговой части программно-аппаратного ИК и истинного значения искомой величины, подставим выражение (4.20) в формулу (2.59):

$$K_{yay}(t) = \int_{-\infty}^t D_x e^{-\alpha|\lambda|} \frac{K_p K_n}{T_p} e^{-\frac{t-\lambda}{T_p}} d\lambda.$$

При $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} K_{yay}(t) &= \frac{K_p K_n D_x}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\lambda \left(\alpha + \frac{1}{T_p} \right)} d\lambda + \int_0^t e^{-\lambda \left(\alpha - \frac{1}{T_p} \right)} d\lambda \right) = \\ &= \frac{K_p K_n D_x}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{\alpha T_p + 1} e^{-\frac{t}{T_p}} - e^{-\alpha t} \right). \end{aligned}$$

При $t < 0$:

$$K_{y_{ay}}(t) = \frac{K_p K_n D_x}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \int_{-\infty}^t e^{\lambda \left(\alpha + \frac{1}{T_p} \right)} d\lambda = \frac{K_p K_n D_x}{\alpha T_p + 1} e^{\alpha t}.$$

Окончательно получим:

$$K_{y_{ay}}(t) = \begin{cases} \frac{K_p K_n D_x}{1 + \alpha T_p} e^{\alpha t} & \text{при } t < 0, \\ \frac{K_p K_n D_x}{1 - \alpha T_p} \left(e^{-\alpha t} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \right) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Подставив выражения (4.10) и (4.21) в (2.60), получим, что взаимная корреляционная функция случайных последовательностей отсчетов искомой величины $Y[k, \xi]$ и выходного сигнала программно-аппаратного ИК $Z[k, \xi]$ при нулевом значении аргумента равна:

$$\begin{aligned} K_{yz}^{\xi}(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{K_p K_n} \cdot \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f} \right)^k \frac{K_p K_n D_x}{1 - \alpha T_p} \left(e^{-\alpha(k+\xi)T_s} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} e^{-\frac{(k+\xi)T_s}{T_p}} \right) = \\ &= \frac{T_s}{1 - \alpha T_p} D_x \left(\frac{e^{-\alpha T_s \xi}}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} \cdot \frac{e^{-\frac{T_s}{T_p} \xi}}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Корреляционная функция эквивалентной весовой функции операции преобразования измеряемой величины в искомую равна:

$$R_{gg}(t) = \int_0^{\infty} \delta(\mu) \delta(\mu + t) d\mu = \delta(t). \quad (4.23)$$

С учетом выражения (4.23) получим, что дисперсия истинного значения искомой величины равна:

$$D_y = K_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) D_x e^{-\alpha|\lambda|} d\lambda = D_x. \quad (4.24)$$

Подставив выражения (4.18), (4.22) и (4.24) в (2.63), получим, что дисперсия последовательности отсчетов $E[k, \xi]$ случайной функции погрешности определения искомой величины в случае помехи типа “белый шум” равна:

$$D_{\xi}^{\xi} = \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \frac{T_s}{2T_f - T_s} \left[\left(\frac{S}{2T_p} - \frac{D_x \alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} \right) \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_x}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} \Big] - \\
& - \frac{2T_s D_x}{1 - \alpha T_p} \left(\frac{e^{-\alpha T_s \xi}}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} \cdot \frac{e^{-\frac{T_s}{T_p} \xi}}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} \right) + D_x.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Выражение для дисперсии последовательности отсчетов $E[k, \xi]$ в случае помехи с корреляционной функцией $K_n(\tau) = D_n e^{-\beta|\tau|}$ получим, подставив выражения (4.19), (4.22) и (4.24) в (2.63):

$$\begin{aligned}
D_\xi^\xi &= \frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \\
& + \frac{T_s D_x}{2T_f - T_s} \left[\frac{1}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} + \frac{k}{1 - (\beta T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{\beta T_p}{1 - (\beta T_p)^2} \right) \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} \right] - \\
& - \frac{2T_s D_x}{1 - \alpha T_p} \left(\frac{e^{-\alpha T_s \xi}}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} \cdot \frac{e^{-\frac{T_s}{T_p} \xi}}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} \right) + D_x.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Поскольку в управляющих системах, подобных АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса, решение о выработке тех или иных управляющих воздействий принимается на основе единичных значений измеряемых величин в любой заданный момент времени, в качестве оценки точности цифровой обработки необходимо использовать максимальное значение относительной среднеквадратической погрешности.

Для того чтобы определить максимальное значение относительной средней квадратичной погрешности, необходимо найти минимум функции:

$$f(\xi) = K_{yz}^\xi(0) = \frac{T_s D_x}{1 - \alpha T_p} \left(\frac{e^{-\alpha T_s \xi}}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} - \frac{2\alpha T_p}{1 + \alpha T_p} \cdot \frac{e^{-T_s \xi / T_p}}{T_f - e^{-T_s / T_p} (T_f - T_s)} \right).$$

Исследования функции $f(\xi)$ показали, что ее наименьшее значение лежит на одной из границ области определения ($0 \leq \xi < 1$). Таким образом, $f(\xi)$ минимальна при $\xi=0$ или $\xi=1$.

Следовательно, максимальное значение относительной средней квадратичной погрешности определения искомой величины в случае помехи типа “белый шум” равно:

$$\eta_y^{\max} = \left[\frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2 D_x} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \frac{T_s}{2T_f - T_s} \left[\left(\frac{S}{2T_p D_x} - \frac{\alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} \right) \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} + \frac{1}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} \right] - \\ \left. - \frac{2}{D_x} \min[K_{yz}^0(0), K_{yz}^1(0)] + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.27)$$

$$\text{где } \min[K_{yz}^0(0), K_{yz}^1(0)] = \begin{cases} K_{yz}^0(0), & \text{если } K_{yz}^0(0) \leq K_{yz}^1(0); \\ K_{yz}^1(0), & \text{если } K_{yz}^0(0) > K_{yz}^1(0). \end{cases}$$

В случае помехи, корреляционная функция которой может быть аппроксимирована экспонентой, относительная средняя квадратичная погрешность равна:

$$\eta_y^{\max} = \left[\frac{q^2}{12K_n^2 K_p^2 D_x} \cdot \frac{T_s}{2T_f - T_s} + \right. \\ \left. + \frac{T_s}{2T_f - T_s} \left[\frac{1}{1 - (\alpha T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\alpha T_s} (T_f - T_s)} + \frac{k}{1 - (\beta T_p)^2} \cdot \frac{T_f + e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-\beta T_s} (T_f - T_s)} - \right. \right. \\ \left. - \left(\frac{\alpha T_p}{1 - (\alpha T_p)^2} + k \frac{\beta T_p}{1 - (\beta T_p)^2} \right) \frac{T_f + e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)}{T_f - e^{-T_s/T_p} (T_f - T_s)} \right] - \\ \left. - \frac{2}{D_x} \min[K_{yz}^0(0), K_{yz}^1(0)] + 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.28)$$

Таким образом, полученное выражение (4.27) может быть использовано как критерий оптимизации интеллектуальных измерительных каналов в условиях, когда характеристики помехи неизвестны, и в качестве верхней оценки можно применить аппроксимацию ее свойств сигналом типа “белый шум”. Выражение (4.28), в свою очередь, может быть использовано как критерий оптимизации измерительных каналов в условиях, когда характеристики помехи могут быть определены, а ее корреляционная функция может быть аппроксимирована экспонентой.

Соотношения (4.27) и (4.28) могут быть использованы для расчета оптимальных параметров типовых операций преобразования измерительной информации в интеллектуальных измерительных каналах как автоматизированной системы управления водоснабжением рыбоводного комплекса, так и других управляющих систем, основой которых являются последовательные цепочки измерительных преобразователей всех типов.

Точность цифровой обработки измерительной информации, в качестве которой используется максимальное значение относительной методической погрешности [см. выражения (4.27), (4.28)], является функционалом от статистических характеристик измеряемой величины и помехи измерений, а также типовых операций преобразования измерительной информации в интеллектуальном измерительном канале.

Выражения же (4.18), (4.19) могут быть использованы в качестве математических моделей при анализе функционирования интеллектуальных измерительных каналов в управляющих системах, подобных АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса.

4.3. Исследование метрологических характеристик измерительных каналов АСУ водоснабжением

Перед тем как использовать полученные математические модели для исследования оптимальных параметров операций преобразования измерительной информации в измерительных каналах АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса необходимо проверить их адекватность процессам в реальных измерительных каналах.

Как правило, проверка адекватности математической модели осуществляется путем проведения эксперимента на реальном объекте. При этом сопоставляются результаты, полученные расчетом по математической модели, с результатами, полученными в ходе эксперимента.

Однако, когда это возможно, эксперимент на реальном объекте заменяют имитационным моделированием. Целесообразность такой замены состоит в простоте повторения и воспроизведения условий эксперимента, а также в простоте запуска, прерывания и возобновления эксперимента.

4.3.1. Особенности имитационного моделирования интеллектуальных измерений

Эксперимент по проверке адекватности полученных математических моделей погрешности цифровой обработки может быть проведен только на программной имитационной модели, реализующей [30]:

1. Генератор входного сигнала (ГВС), предназначенный для моделирования полезного измерительного сигнала и помех измерения и включающий два генератора случайных чисел (ГСЧ1, ГСЧ2) и два формирующих фильтра ($\Phi\Phi_x$, $\Phi\Phi_n$).

2. Блок имитации функционирования интеллектуального измерительного канала (БИИК), в свою очередь включающий имитационные модели аналоговых измерительных преобразователей: первичного преобразователя (ПП), нормирующего преобразователя (НП), аналого-цифрового преобразователя (АЦП), а также алгоритмы цифровой обработки измерительной информации: алгоритм реализации шкалы датчика (ШД), алгоритм цифровой фильтрации (Φ), алгоритм восстановления измерительной информации (ВЭ).

3. Блок расчета погрешности (БРП) определения искомой величины, в котором вычисляются основные статистические характеристики последовательности отсчетов случайной функции ошибки: оценки математического ожидания, дисперсии и значений нормированной корреляционной функции.

Строго говоря, **моделирование на цифровой ЭВМ непрерывных сигналов** невозможно ввиду дискретной природы цифровой машины. Однако случайный процесс $G(t)$ с непрерывным временем можно с любой наперед заданной точностью заменить соответствующим процессом $G(nt_0)$ с дискретным временем $t_n=nt_0$, где t_0 – определенный, разумно выбранный шаг дискретизации процесса; n – целочисленный аргумент. В результате случайному процессу $G(t)$ будет поставлена в соответствие случайная

последовательность $G^*(n)=G(nt_0)$, а его непрерывным реализациям $g(t)$ – дискретные реализации $g^*(n)=g(nt_0)$.

Таким образом, задача цифрового моделирования измерительных сигналов сводится к нахождению способов формирования на ЭВМ дискретных реализаций соответствующих случайных процессов.

В ЭВМ источниками случайности являются датчики случайных чисел, позволяющие выработать реализации независимых случайных чисел с одинаковым, как правило, равномерным распределением. Последовательное обращение к такому датчику можно рассматривать как процесс формирования реализации “дискретного белого шума”. Для формирования на ЭВМ дискретных реализаций более сложных случайных процессов используют различные способы преобразования реализаций “дискретного белого шума”.

Существует большое количество алгоритмов [31], позволяющих моделировать на ЭВМ стационарные нормальные случайные процессы. Принцип работы этих алгоритмов основан на линейном преобразовании стационарной последовательности $\xi^*(n)$ независимых нормальных случайных чисел (“дискретного белого шума”) в последовательность $x^*(n)$, коррелированную по заданному закону. При этом оператор линейного преобразования записывается либо в виде скользящего суммирования с некоторым весом $c_k=c[k]$

$$x^*(n) = \sum_{k=1}^N c_k \xi^*(n-k), \quad (4.29)$$

либо как рекуррентное уравнение вида

$$x^*(n) = \sum_{k=0}^l a_k \xi^*(n-k) - \sum_{k=1}^m b_k x^*(n-k). \quad (4.30)$$

Вид корреляционной функции случайного процесса, моделируемого с помощью алгоритмов (4.29) и (4.30), определяется набором значений параметров a_k , b_k , c_k и их количеством. Алгоритмы (4.29) и (4.30) позволяют формировать дискретные реализации случайных процессов сколь угодно большой длины.

В разработанной имитационной модели генератор входного сигнала осуществлял моделирование двух некоррелированных стационарных случайных процессов (полезного сигнала и помехи) с заданными статистическими характеристиками (математическим ожиданием и корреляционной функцией). Для моделирования сигналов с экспоненциальными корреляционными функциями использовался не имеющий методической погрешности рекуррентный алгоритм вида (4.30). Расчет параметров алгоритма осуществлялся с использованием метода дискретизации непрерывных формирующих фильтров.

В результате расчета был получен рекуррентный алгоритм, описывающий поведение дискретного фильтра $\Phi\Phi_x$, формирующего из последовательности независимых случайных чисел (реализации “дискретного белого шума”) с параметрами $(0,1)$ случайную последовательность, значения которой $x(i)$ равны значениям случайного сигнала $X(t_i)$ с корреляционной функцией $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ в моменты времени $t_i=it_0$:

$$x(i) = e^{-\alpha t_0} x(i-1) + \sqrt{D_x(1 - e^{-2\alpha t_0})} \xi(i).$$

В качестве источников дискретного нормального “белого шума” выступали два генератора случайных чисел ГСЧ1 и ГСЧ2 (использование двух генераторов случайных чисел вместо одного обусловлено необходимостью получения некоррелированных случайных процессов), формирующих нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для формирования нормально распределенных чисел использовался так называемый прямой метод, суть

которого заключается в следующем. Формируется пара случайных величин (U_1, U_2) с равномерным распределением в интервале от 0 до 1. Тогда $X_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2$, $X_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin 2\pi U_2$ образуют пару независимых нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

При формировании помехи $N(t)$, представляющей собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$K_n(\tau) = D_n e^{-\beta|\tau|}$, сигнал с выхода ГСЧ1 подавался на вход формирующего фильтра $\Phi\Phi_n$, алгоритм работы которого аналогичен алгоритму работы фильтра $\Phi\Phi_x$:

$$n(i) = e^{-\beta t_0} n(i-1) + \sqrt{D_n(1 - e^{-2\beta t_0})} \xi(i).$$

Блок имитации функционирования программно-аппаратного измерительного канала содержит имитационные модели звеньев, входящих в структуру измерительного канала. Рассмотрим эти модели более подробно.

В соответствии с принятой аппроксимацией динамических свойств первичного преобразователя аperiodическим звеном первого порядка дифференциальное уравнение, описывающее его работу, имеет вид:

$$T_p \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p x(t),$$

где T_p – постоянная времени, K_p – коэффициент усиления, $x(t)$ – входной сигнал первичного преобразователя, $y(t)$ – выходной сигнал первичного преобразователя.

Получить цифровую имитационную модель первичного преобразователя можно, заменив производную в дифференциальном уравнении ее дискретной оценкой

$$\frac{dy(t_i)}{dt} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_0},$$

где $y(t_i)$ и $y(t_{i-1})$ – последовательные во времени отсчеты, разделенные интервалом времени t_0 . В результате замены получим следующее разностное уравнение

$$T_p \frac{y(i) - y(i-1)}{t_0} + y(i) = K_p x(i).$$

Тогда имитационная модель первичного преобразователя:

$$y(i) = \frac{T_p}{T_p + t_0} y(i-1) + \frac{K_p t_0}{T_p + t_0} x(i). \quad (4.31)$$

Цифровая модель нормирующего преобразователя, являющегося усилительным звеном, имеет следующий вид:

$$y(i) = K_n x(i).$$

При выборе математической модели АЦП предполагалось, что он выполняет идеальные операции дискретизации во времени и квантования по уровню. Поэтому и имитационная модель должна была отражать только эти две процедуры преобразования измерительной информации, тогда как более сложные имитационные модели учитывают аппаратные шумы преобразователя и его динамические свойства.

Имитационная модель аналого-цифрового преобразователя, воспроизводящая процедуру равномерного квантования по уровню с шагом q , имеет следующий вид:

$$y(i) = E \left[\frac{x(i)}{q} + \frac{1}{2} \right] q. \quad (4.32)$$

При этом имитация равномерной дискретизации во времени с интервалом T_s осуществлялась на алгоритмическом уровне и заключалась в том, что квантованию по уровню и, соответственно, дальнейшей обработке подвергалось лишь каждое k -ое значение сигнала на входе имитационной модели АЦП, где $k = E \left[\frac{T_s}{t_0} \right]$.

Имитационные модели алгоритма реализации шкалы датчика и цифрового фильтра совпадают с алгоритмами, работающими в реальном программно-аппаратном измерительном канале, и имеют соответственно вид:

$$y(i) = \frac{x(i)}{K_n K_p}, \quad y(i) = y(i-1) + \frac{T_s}{T_f} [x(i) - y(i-1)],$$

где $x(i)$, $y(i)$ – текущие значения соответственно входного и выходного сигналов соответствующего алгоритма; $y(i-1)$ – предыдущее значение выходного сигнала алгоритма цифровой фильтрации.

Имитация функционирования восстанавливающего элемента нулевого порядка осуществлялась следующим образом. Восстановленное значение сигнала на выходе ИК в момент времени $t_i = it_0$ принималось равным значению сигнала на выходе алгоритма цифровой фильтрации, которое изменялось лишь на каждой k -ой итерации цикла

обработки измерительной информации, где $k = E \left[\frac{T_s}{t_0} \right]$. Таким образом, значение

выходного сигнала оставалось неизменным в течении k итераций, т.е. в течение периода

$T = kt_0 = E \left[\frac{T_s}{t_0} \right] t_0 = T_s$, что полностью соответствует принципу функционирования

экстраполятора нулевого порядка.

Расчет оценок статистических характеристик случайной последовательности $E[k, \xi]$ в БРП осуществлялся следующим образом.

По случайной последовательности, длина N которой выбиралась из весьма общих соображений, вычислялись предварительные оценки математического ожидания

$$\hat{m}_{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[i, \xi]$$

и значений нормированной корреляционной функции

$$\hat{\rho}_{\xi}(kT_s) = \frac{N-1}{N-k-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (E[i, \xi] - \hat{m}_{\xi})(E[i+k, \xi] - \hat{m}_{\xi})}{\sum_{j=1}^N (E[j, \xi] - \hat{m}_{\xi})^2},$$

где $k=0, 1, 2, \dots, l$; $l \leq 0.1N$. Расчет значений нормированной корреляционной функции

осуществлялся до значения аргумента k_m , при котором $\hat{\rho}_{\xi}(k_m T_s) \leq 0.05$.

Если длина имеющейся случайной последовательности оказывалась меньше $k_m \cdot 10^2$ (оценки статистических характеристик, вычисленные по последовательности такой длины, имеют распределение, близкое к нормальному), снималась новая последовательность, по которой вычислялись уточненные оценки математического

ожидания и значений нормированной корреляционной функции, а также оценка дисперсии:

$$\hat{D}_{\xi}^{\xi} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (E[i, \xi] - \hat{m}_{\xi}^{\xi})^2.$$

4.3.2. Исследование адекватности моделируемых случайных сигналов и имитационных моделей компонентов измерительного канала

Имитационная модель представляет собой последовательное соединение блоков, каждый из которых имитирует функционирование соответствующего элемента системы. При этом об адекватности имитационной модели в целом можно судить по адекватности каждого из отдельных блоков, составляющих имитационную модель.

Все имитационные модели, кроме моделей алгоритмов реализации шкалы датчика и цифровой фильтрации, лишь приближенно воспроизводят функционирование соответствующих блоков. Поэтому необходимо определить, насколько точно каждый из блоков имитационной модели воспроизводит функционирование реального элемента.

Проверка соответствия характеристик случайных сигналов, формируемых генератором входного сигнала, заданным осуществлялась следующим образом.

Выдвигалась нулевая гипотеза H_0 , согласно которой формируемый ГВС стационарный эргодический случайный сигнал $V(t)$ с корреляционной функцией вида

$K_v(\tau) = D_v e^{-\alpha|\tau|}$ имеет заданные статистические характеристики, а именно

математическое ожидание - m_0 , дисперсию - D_0 , скорость изменения - α_0 . Далее осуществлялась проверка данной гипотезы при уровне значимости риска $q=0.05$ (5%), гарантирующем приемлемую мощность критерия H_0 [32]. Для этого выполнялась следующая последовательность шагов.

Шаг 1. Вычислялась предварительная оценка математического ожидания случайного процесса $V(t)$:

$$\hat{m}_v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(it_0),$$

где N – количество отсчетов реализации $v(t)$, t_0 – интервал времени между двумя отсчетами реализации случайной функции $V(t)$. При этом длина реализации $T=Nt_0$ выбиралась из весьма общих соображений.

Вычислялись предварительные оценки значений нормированной корреляционной функции:

$$\hat{\rho}_v(kt_0) = \frac{N-1}{N-k-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{N-k} [v(it_0) - \hat{m}_v][v\{(i+k)t_0\} - \hat{m}_v]}{\sum_{j=1}^N [v(it_0) - \hat{m}_v]^2},$$

где $k=0, 1, 2 \dots, l$; $l \leq 0.1N$.

Расчет значений нормированной корреляционной функции осуществлялся до значения k_m , при котором $\hat{\rho}_v(k_m t_0) \leq 0.05$. Значения функции $V(t)$ через интервал корреляции $\tau_{к.м} = k_m t_0$ можно считать некоррелированными, а так как процесс нормальный, то и статистически независимыми.

Шаг 2. Формировалась новая реализация длиной $T = \tau_{к.м} \cdot 10^2$. Оценки статистических характеристик, рассчитываемые по реализации такой длины, имеют распределение, близкое к нормальному. Интервал времени t_0 между соседними отсчетами принимался равным $\tau_{к.м}/100$.

По новой реализации вычислялись уточненные оценки математического ожидания \hat{m}_v , значений нормированной корреляционной функции $\hat{\rho}_v(kt_0)$ и интервала корреляции $\tau_{к.м}$. Кроме того, вычислялась оценка дисперсии:

$$\hat{D}_v = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [v(it_0) - \hat{m}_v]^2.$$

Шаг 3. С помощью критерия t осуществлялась проверка равенства математического ожидания формируемого случайного процесса $V(t)$ величине m_0 . Для этого вычислялось следующее отношение:

$$t = \frac{|\hat{m}_v - m_0|}{\sigma_{m_v}},$$

где σ_{m_v} - среднеквадратическое отклонение оценки математического ожидания. Значение среднеквадратического отклонения оценки математического ожидания равно:

$$\sigma_{m_v} = \sqrt{\frac{\hat{D}_v}{N} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{k_m} \left(1 - \frac{i}{N} \right) \hat{\rho}_v(it_0) \right]}.$$

Вычисленное значение t сравнивалось с табличным $t_{q,v}$ для распределения Стьюдента, где q – уровень значимости риска, а v - число степеней свободы, которое вычислялось из соотношения

$$v = \frac{2T}{\tau_{к.м}} = \frac{2Nt_0}{k_m t_0} = \frac{2N}{k_m}, \quad (4.33)$$

где T – длина реализации $v(t)$, $\tau_{к.м}$ – максимальный интервал корреляции.

Отличие оценки математического ожидания \hat{m}_v от значения m_0 можно считать несущественным, если $t < t_{q,v}$.

Шаг 4. С помощью критерия F (Фишера) осуществлялась проверка равенства дисперсии случайного процесса $V(t)$ заданной величине D_0 . С этой целью вычислялось отношение

$$F = \frac{\max[D_0, \hat{D}_v]}{\min[D_0, \hat{D}_v]},$$

где $\max[D_0, \hat{D}_v]$, $\min[D_0, \hat{D}_v]$ - соответственно максимальная и минимальная из дисперсий.

Вычисленное значение F сравнивалось с табличным $F_{\text{табл}}$ при данном для каждой дисперсии числе степеней свободы и избранном уровне значимости риска. Число степеней свободы для дисперсии D_0 принималось равным бесконечности, а для \hat{D}_v - значению величины v , вычисленному ранее по формуле (4.33). В случае если $F < F_{\text{табл}}$, различие между дисперсиями можно считать несущественным.

Шаг 5. Проверка равенства скорости изменения моделируемого случайного процесса величине α_0 осуществлялась путем анализа совпадения значений

корреляционных функций $\rho_0(\tau)$ и $\hat{\rho}_v(\tau)$ при заданном временном сдвиге $\tau_{\kappa.0.5}$.

Интервал времени $\tau_{\kappa.0.5}$ принимался равным $k_{0.5}t_0$ при условии, что $\hat{\rho}_v(k_{0.5}t_0) \leq 0.5$. Значение нормированной корреляционной функции $\rho_0(\tau)$ вычислялось по формуле:

$$\rho_0(\tau_{k0.5}) = e^{-\alpha_0 |k_{0.5}t_0|}.$$

Равенство коэффициентов корреляции $\rho_0(\tau_{k0.5})$ и $\hat{\rho}_v(\tau_{k0.5})$ проверялось с помощью критерия t . Для чего вычислялось отношение

$$t = \frac{|\hat{\rho}_v(\tau_{\kappa.0.5}) - \rho_0(\tau_{\kappa.0.5})|}{\sigma_{\rho_v(\tau_{\kappa.0.5})}},$$

где $\sigma_{\rho_v(\tau_{\kappa.0.5})}$ - среднеквадратическое отклонение оценки значения $\hat{\rho}_v(\tau_{\kappa.0.5})$ нормированной корреляционной функции. Значение $\sigma_{\rho_v(\tau_{\kappa.0.5})}$ в последнем выражении равно:

$$\sigma_{\rho_v(nt_0)} = \sqrt{\frac{1}{N-n} \left[1 + \hat{\rho}_v^2(nt_0) + 2 \sum_{i=1}^{k_M} \left(1 - \frac{i}{N-n} \right) \left\{ \hat{\rho}_v^2(it_0) + \hat{\rho}_v[(i+n)t_0] \hat{\rho}_v[(i-n)t_0] \right\} \right]},$$

$$\text{где } n = E \left[\frac{\tau_{\kappa.0.5}}{t_0} \right].$$

Вычисленное значение t сравнивалось с табличным $t_{q,v}$ для распределения Стьюдента. Отличие скорости изменения случайного процесса $V(t)$ от α_0 можно считать несущественным, если $t < t_{q,v}$.

Сравнение рассчитанных значений критериев с табличными для распределения Стьюдента показало, что математическое ожидание, дисперсия и скорость изменения отличаются от заданных значений несущественно, и, следовательно, нулевая гипотеза H_0 о соответствии характеристик моделируемых случайных сигналов заданным верна.

При приближенной замене аналогового измерительного преобразователя цифровой моделью возникает погрешность, в результате которой истинные значения сигнала $Y(t)$ на выходе преобразователя в точках $t_n=nt_0$ отличаются от вычисленных значений $Z^*(n)$ на выходе цифровой модели. Ошибка $E^*(n)=Y(nt_0)-Z^*(n)$, обусловленная дискретизацией, будет, вообще говоря, тем меньше, чем меньше шаг дискретизации t_0 . В пределе при $t_0 \rightarrow 0$ процессы в аналоговом преобразователе и цифровой модели совпадают. Однако при уменьшении шага дискретизации увеличивается объем вычислений, поэтому шаг t_0 целесообразно выбирать как можно большим, но удовлетворяющим заданной точности моделирования.

Найдем относительную среднеквадратическую погрешность цифрового моделирования аналогового измерительного преобразователя, на вход которого воздействует стационарный случайный процесс.

Пусть линейный аналоговый измерительный преобразователь с весовой функцией $h(t)$, на вход которого воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$, моделируется дискретным (цифровым) звеном с весовой функцией $h^*(n)$. Ошибка моделирования, которую можно рассматривать как выходной сигнал системы, представленной на рис. 4.3, будет равна

$$E^*(n) = Y(nt_0) - Z^*(n),$$

где $Y(nt_0)$ – значение сигнала на выходе измерительного преобразователя, $Z^*(n)$ – значение сигнала на выходе цифровой модели.

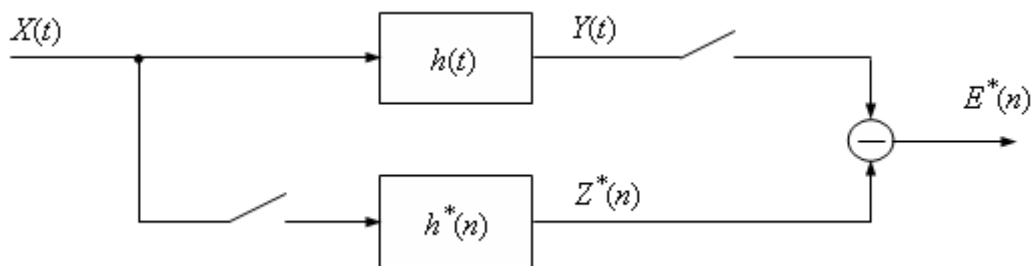


Рис. 4.3. Схема выделения погрешности цифрового моделирования

Учитывая, что выходной сигнал линейного аналогового преобразователя определяется как

$$Y(nt_0) = \int_0^{\infty} h(t) X(nt_0 - t) dt,$$

а выходной сигнал линейной цифровой модели как

$$Z^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h^*(k)X([n-k]t_0),$$

ошибка будет равна

$$E^*(n) = \int_0^{\infty} h(t)X(nt_0 - t)dt - \sum_{k=0}^{\infty} h^*(k)X([n-k]t_0).$$

Отсюда дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} &= M\{[E^*(n)]^2\} = M\left\{\left[\int_0^{\infty} h(v)X(nt_0 - v)dv - \sum_{k=0}^{\infty} h^*(k)X([n-k]t_0)\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_0^{\infty} h(\mu)X(nt_0 - \mu)d\mu - \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l)X([n-l]t_0)\right]\right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(v)h(\mu)K_x(v - \mu)d\mu dv - 2 \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) \int_0^{\infty} h(v)K_x(v - lt_0)dv + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x(mt_0) \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l)h^*(l+m) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\lambda)R(\lambda)d\lambda - 2 \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) \int_0^{\infty} h(v)K_x(v - lt_0)dv + \\ &\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x(mt_0)R^*(m) = D_y - 2K_{yz}(0) + D_z, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $K_x(t)$ – корреляционная функция случайного процесса $X(t)$,

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} h(t)h(t + \lambda)dt \quad (4.35)$$

- корреляционная функция весовой функции аналогового преобразователя,

$$R^*(m) = \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l)h^*(l+m) \quad (4.36)$$

- корреляционная функция весовой функции $h^*(n)$ цифровой модели, D_y – дисперсия выходного сигнала $Y(t)$ аналогового преобразователя, $K_{yz}(t)$ – взаимная корреляционная функция сигнала $Y(t)$ на выходе аналогового преобразователя и последовательности $Z^*(n)$ на выходе цифровой модели, D_z - дисперсия последовательности $Z^*(n)$ на выходе цифровой модели.

Относительная среднеквадратическая погрешность цифрового моделирования линейного аналогового измерительного преобразователя будет равна

$$\eta_y = \sqrt{\frac{D_{\varepsilon}}{D_y}}. \quad (4.37)$$

Найдем относительную среднеквадратическую погрешность цифровой модели первичного преобразователя [см. выражение (4.31)] с весовой

функцией $h_p(t) = \frac{K_p}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}}$, на вход которого воздействует стационарный

случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$.

Передаточная функция цифровой модели, описываемой рекуррентным уравнением (4.31), в смысле дискретного преобразования Лапласа имеет вид

$$H_p^*(z) = \frac{D\{y(i)\}}{D\{x(i)\}} = \frac{K_p \frac{t_0}{T_p + t_0}}{1 - \frac{T_p}{T_p + t_0} z} = \frac{\gamma}{1 - \lambda z},$$

где $\gamma = K_p \frac{t_0}{T_p + t_0}$, $\lambda = \frac{T_p}{T_p + t_0}$. Соответствующая ей весовая функция равна

$$h_p^*(n) = \gamma \lambda^n = K_p \frac{t_0}{T_p + t_0} \left(\frac{T_p}{T_p + t_0} \right)^n. \quad (4.38)$$

Согласно (4.36) корреляционная функция весовой функции (4.38) будет иметь вид

$$R_{pp}^*(m) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma \lambda^l \gamma \lambda^{l+m} = \gamma^2 \lambda^m \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^{2l} = \frac{\gamma^2 \lambda^m}{1 - \lambda^2}. \quad (4.39)$$

Выражение (4.39) позволяет получать значения корреляционной функции при значениях аргумента, удовлетворяющих условию $m \geq 0$. Нетрудно доказать, что выражение для вычисления значений корреляционной функции при любых значениях аргумента будет иметь вид

$$R_{pp}^*(m) = \frac{\gamma^2 \lambda^{|m|}}{1 - \lambda^2} = \frac{K_p^2 t_0}{2T_p + t_0} \left(\frac{T_p}{T_p + t_0} \right)^{|m|}. \quad (4.40)$$

С учетом выражения (4.40) дисперсия последовательности $Z^*(n)$ на выходе цифровой модели будет равна

$$\begin{aligned} D_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x(mt_0) R_{pp}^*(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha t_0 |m|} \frac{\gamma^2 \lambda^{|m|}}{1 - \lambda^2} = \\ &= \frac{D_x \gamma^2}{1 - \lambda^2} \left(1 + 2 \frac{e^{-\alpha t_0} \lambda}{1 - e^{-\alpha t_0} \lambda} \right) = \frac{D_x \gamma^2 (1 + e^{-\alpha t_0} \lambda)}{(1 - \lambda^2)(1 - e^{-\alpha t_0} \lambda)} = K_p^2 D_x \frac{t_0 [t_0 + T_p (1 + e^{-\alpha t_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p (1 - e^{-\alpha t_0})]}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Дисперсия выходного сигнала $Y(t)$ аналогового преобразователя равна корреляционной функции сигнала на выходе аналоговой части программно-аппаратного

ИК [см. выражение (4.15)], структура которого изображена на рис. 1.7, при нулевом значении аргумента, а также $K_n=1$, $S=0$

$$D_y = \frac{K_p^2 D_x}{1 + \alpha T_p}. \quad (4.42)$$

Наконец взаимная корреляционная функция сигнала $Y(t)$ на выходе преобразователя и последовательности $Z^*(n)$ на выходе цифровой модели при нулевом значении аргумента равна

$$\begin{aligned} K_{yz}(0) &= \sum_{l=0}^{\infty} h_p^*(l) \int_0^{\infty} h_p(v) K_x(v-lt_0) dv = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma \lambda^l \int_0^{\infty} \frac{K_p}{T_p} e^{-\frac{v}{T_p}} D_x e^{-\alpha|v-lt_0|} dv = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \gamma \lambda^l K_p D_x \frac{1}{T_p} \left[\int_0^{lt_0} e^{-\frac{v}{T_p}} e^{\alpha(v-lt_0)} dv + \int_{lt_0}^{\infty} e^{-\frac{v}{T_p}} e^{-\alpha(v-lt_0)} dv \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \gamma \lambda^l K_p D_x \left[\frac{e^{-\alpha_0 l}}{\alpha T_p - 1} \left(e^{\left(\alpha - \frac{1}{T_p}\right) lt_0} - 1 \right) + \frac{e^{\alpha_0 l}}{\alpha T_p + 1} e^{-\left(\alpha + \frac{1}{T_p}\right) lt_0} \right] = \\ &= \gamma K_p D_x \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p)^2 - 1} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l e^{-\frac{t_0 l}{T_p}} - \frac{1}{\alpha T_p - 1} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l e^{-\alpha_0 l} \right) = \\ &= \frac{\gamma K_p D_x}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p + 1)(1 - \lambda e^{-t_0/T_p})} - \frac{1}{1 - \lambda e^{-\alpha_0}} \right) = \\ &= K_p^2 D_x \frac{t_0}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha_0})} \right). \quad (4.43) \end{aligned}$$

Подставив (4.41), (4.42) и (4.43) в (4.34), получим следующее выражение для дисперсии ошибки цифрового моделирования аналогового измерительного преобразователя

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= K_p^2 D_x \left[\frac{1}{\alpha T_p + 1} - \frac{2t_0}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha_0})} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{t_0[t_0 + T_p(1 + e^{-\alpha_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha_0})]}. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Как видно из выражения (4.44), погрешность моделирования зависит не только от шага дискретизации t_0 и параметров преобразователя K_p и T_p , но и от вида и параметров корреляционной функции входного сигнала D_x и α .

Выражение (4.44) позволяет рассчитать погрешность цифрового моделирования аналогового измерительного преобразователя, когда на его вход воздействует один случайный сигнал. Однако нам необходимо было моделировать первичный преобразователь, на вход которого одновременно воздействуют два некоррелированных стационарных случайных сигнала: измеряемая величина и помеха измерения. В силу линейности рассматриваемой системы дисперсия ошибки моделирования будет равна

$$D_\varepsilon = D_{\varepsilon_x} + D_{\varepsilon_n},$$

где D_{ε_x} - дисперсия ошибки моделирования первичного преобразователя, на вход которого воздействует только полезный сигнал $X(t)$; D_{ε_n} - дисперсия ошибки моделирования первичного преобразователя, на вход которого воздействует только помеха $N(t)$.

В случае, когда корреляционные функции полезного сигнала и помехи имеют соответственно вид

$$K_x(t) = D_x e^{-a|t|}, \quad K_n(t) = D_n e^{-\beta|t|},$$

дисперсия ошибки моделирования с учетом выражения (4.44) будет равна

$$D_\varepsilon = K_p^2 D_x \left[\frac{1}{\alpha T_p + 1} - \frac{2t_0}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha t_0})} \right) + \frac{t_0[t_0 + T_p(1 + e^{-\alpha t_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha t_0})]} \right] + K_p^2 D_n \left[\frac{1}{\beta T_p + 1} - \frac{2t_0}{\beta T_p - 1} \left(\frac{2\beta T_p}{(\beta T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\beta t_0})} \right) + \frac{t_0[t_0 + T_p(1 + e^{-\beta t_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p(1 - e^{-\beta t_0})]} \right]. \quad (4.45)$$

Подставив (4.45) в (4.37) и учитывая, что дисперсия сигнала на выходе первичного преобразователя равна

$$D_y = D_{y_x} + D_{y_n},$$

где D_{y_x} - дисперсия выходного сигнала первичного преобразователя, когда на его вход воздействует только полезный сигнал $X(t)$ [см. выражение (4.42)], D_{y_n} - дисперсия выходного сигнала первичного преобразователя, когда на его вход воздействует только помеха $N(t)$, получим, что относительная среднеквадратическая погрешность равна

$$\eta_y = \sqrt{\frac{D_\varepsilon}{D_y}} = \left[\frac{(1 + \alpha T_p)(1 + \beta T_p)}{D_x(1 + \beta T_p) + D_n(1 + \alpha T_p)} \left(D_x \left(\frac{1}{\alpha T_p + 1} - \frac{2t_0}{\alpha T_p - 1} \left(\frac{2\alpha T_p}{(\alpha T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha t_0})} \right) + \frac{t_0[t_0 + T_p(1 + e^{-\alpha t_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p(1 - e^{-\alpha t_0})]} \right) + D_n \left(\frac{1}{\beta T_p + 1} - \frac{2t_0}{\beta T_p - 1} \left(\frac{2\beta T_p}{(\beta T_p + 1)[t_0 + T_p(1 - e^{-t_0/T_p})]} - \frac{1}{t_0 + T_p(1 - e^{-\beta t_0})} \right) + \frac{t_0[t_0 + T_p(1 + e^{-\beta t_0})]}{(2T_p + t_0)[t_0 + T_p(1 - e^{-\beta t_0})]} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.46)$$

Выражение (4.46) позволяет при заданном шаге дискретизации t_0 рассчитать значение относительной среднеквадратической погрешности цифрового моделирования аналогового первичного преобразователя с весовой функцией $h_p(t) = \frac{K_p}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}}$ при воздействии на его вход сигнала, представляющего собой сумму двух некоррелированных стационарных случайных процессов с корреляционными функциями $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ и $K_n(\tau) = D_n e^{-\beta|\tau|}$.

Для того чтобы решить обратную задачу: рассчитать максимальное значение шага дискретизации t_0 , обеспечивающее допустимую погрешность цифрового моделирования, необходимо одним из численных методов решить на ЭВМ уравнение (4.46).

Если пренебречь погрешностью округления чисел в ЭВМ, **имитационная модель операции квантования по уровню** вида (4.32) в точности воспроизводит функционирование релейного элемента со статической характеристикой, изображенной на рис. 2.2,в.

Моделирование равномерной дискретизации во времени, а также операции восстановления осуществляется без погрешности при условии, что период квантования по времени T_s в АЦП кратен шагу дискретизации t_0 сигнала до операции аналого-цифрового преобразования, т.е. $T_s = kt_0$, где k - целое число. Учитывая этот факт, а также имеющееся ограничение на возможные значения t_0 , обусловленное обеспечением заданной точности цифрового моделирования аналогового первичного преобразователя, значение шага дискретизации t_0 рассчитывалось по следующей формуле:

$$t_0 = \frac{T_s}{E[T_s / t_0^*] + 1},$$

где t_0^* - максимально возможное значение шага дискретизации t_0 , позволяющее обеспечить заданную точность цифрового моделирования аналогового первичного преобразователя и рассчитываемое путем решения численными методами на ЭВМ уравнения (4.46).

4.3.3. Проверка адекватности математической модели погрешности

Проверка адекватности математической модели реальному измерительному каналу осуществлялась путем сопоставления результатов, получаемых расчетом по математической модели [см. выражения (4.13), (4.26)], с результатами эксперимента на программной имитационной модели. Замена эксперимента на реальном измерительном канале экспериментом на программной имитационной модели правомочна, так как ранее была доказана адекватность последней первому.

Вывод об адекватности математической модели был сделан на основе сравнения значений математического ожидания и дисперсии случайной последовательности $E[k, \xi]$ функции погрешности, рассчитанных по математической модели, с оценками, полученными расчетом по экспериментальным реализациям.

Проверка соответствия математического ожидания m_ξ^ξ , рассчитанного по математической модели, оценке \hat{m}_ξ^ξ , вычисленной в БРП по результатам эксперимента на имитационной модели, осуществлялась с помощью критерия t .

Для этого вычислялось отношение

$$t = \frac{|\hat{m}_\xi^\xi - m_\xi^\xi|}{\sigma_{m_\xi^\xi}},$$

где $\sigma_{m_\xi^\xi}$ - среднеквадратическое отклонение оценки \hat{m}_ξ^ξ математического ожидания.

Значение $\sigma_{m_\xi^\xi}$ равно:

$$\sigma_{m_\xi^\xi} = \sqrt{\frac{\hat{D}_\xi^\xi}{N} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{k_M} \left(1 - \frac{i}{N} \right) \hat{\rho}_\xi^\xi(iT_s) \right]}.$$

Вычисленное значение t сравнивалось с табличным $t_{q, \nu}$ для распределения Стьюдента при уровне значимости риска q , равном 0.05, и числе степеней свободы ν , рассчитываемом по формуле:

$$\nu = \frac{2T}{\tau_{k..M}} = \frac{2NT_s}{k_M T_s} = \frac{2N}{k_M},$$

где N – количество отсчетов, составляющих случайную последовательность $E[k, \xi]$, k_M – значение аргумента нормированной корреляционной функции случайной

последовательности $E[k, \xi]$, при котором $\hat{\rho}_\xi^\xi(k_M T_s) \leq 0.05$.

Если $t < t_{q, \nu}$, то отличие оценки математического ожидания \hat{m}_ξ^ξ от значения m_ξ^ξ можно считать несущественным, а математическую модель адекватной по математическому ожиданию.

Проверка адекватности математической модели по дисперсии осуществлялась с помощью критерия F (Фишера). Для этого вычислялось отношение

$$F = \frac{\max[D_{\varepsilon}^{\xi}, \hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}]}{\min[D_{\varepsilon}^{\xi}, \hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}]},$$

где $\max[D_{\varepsilon}^{\xi}, \hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}]$, $\min[D_{\varepsilon}^{\xi}, \hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}]$ - соответственно максимальная и минимальная из дисперсий.

Вычисленное значение F сравнивалось с табличным $F_{\text{табл}}$ при уровне значимости риска, равном 0.05, и числе степеней свободы, равном бесконечности для дисперсии D_{ε}^{ξ} и ν - для оценки $\hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}$, вычисленной по результатам имитационного моделирования.

В случае если $F < F_{\text{табл}}$, различие между дисперсиями D_{ε}^{ξ} и $\hat{D}_{\varepsilon}^{\xi}$ можно считать несущественным, а математическую модель адекватной по дисперсии.

Сравнение рассчитанных значений критериев с табличными для соответствующих критериев показало, что отличие значений математического ожидания и дисперсии, полученных расчетом по математической модели (значение математического ожидания погрешности, рассчитанное по математической модели, в таблице не приведено, по причине того, что оно равно нулю при любых наборах параметров) от оценок, полученных расчетом по экспериментальным реализациям, можно считать несущественным. Следовательно, полученная в третьей главе математическая модель адекватна реальному измерительному каналу.

4.3.4. Исследование свойств интеллектуальных измерительных каналов

Из рассмотренных выше математических моделей следует, что относительная среднеквадратическая погрешность определения искомой величины есть функция от параметров измерительного канала и параметров сигнала, воздействующего на его вход

$$\eta_x = f(P_s, P_c),$$

где P_s - вектор параметров сигнала, воздействующего на вход ИК, P_c - вектор параметров ИК.

Задача параметрического синтеза измерительного канала заключается в том, чтобы для заданного вектора параметров измеряемого сигнала найти из области допустимых значений вектор параметров ИК, обеспечивающих заданную точность получаемых оценок измеряемых величин.

Полученные в третьей главе выражения (4.27), (4.28) показывают, что зависимость погрешности от параметров канала имеет сложную форму.

Проанализируем влияние на погрешность каждого из параметров измерительного канала.

Как следует из выражений (4.27), (4.28), значения коэффициентов усиления первичного K_p и нормирующего K_n преобразователей, а также величина шага квантования по уровню q влияют только на составляющую общей погрешности цифровой обработки измерительной информации, обусловленную квантованием по уровню в АЦП. На практике эта составляющая пренебрежимо мала по сравнению с общей погрешностью. Однако следует всегда стремиться к тому, чтобы диапазон изменения сигнала на входе

АЦП занимал возможно большую часть шкалы квантования. В противном случае разрешающая способность окажется малой и ошибка квантования может стать существенной.

Как известно, значения нормального стационарного случайного процесса $X(t)$ с вероятностью 0.997 расположены в интервале, равном $6\sqrt{D_x}$ и расположенном симметрично относительно математического ожидания, т.е.

$$x_{\max} - x_{\min} = 6\sqrt{D_x},$$

где x_{\max} , x_{\min} - верхняя и нижняя границы диапазона изменения сигнала, D_x - дисперсия сигнала.

Дисперсия сигнала на входе АЦП может быть найдена из выражения для корреляционной функции путем подстановки $t=0$. В случае помехи с экспоненциальной корреляционной функцией дисперсия будет равна [см. выражение (4.16)]

$$D_{x_{\text{АЦП}}} = K_p^2 K_n^2 D_x \left(\frac{1}{1 + \alpha T_p} + \frac{k}{1 + \beta T_p} \right),$$

а в случае помехи типа “белый шум” [см. выражение (4.15)] -

$$D_{x_{\text{АЦП}}} = K_p^2 K_n^2 \left(\frac{D_x}{1 + \alpha T_p} + \frac{S}{2T_p} \right).$$

Таким образом, в первом случае диапазон изменения сигнала на входе АЦП равен

$$(x_{\text{АЦП}})_{\max} - (x_{\text{АЦП}})_{\min} = 6\sqrt{D_{x_{\text{АЦП}}}} = 6K_p K_n \sqrt{D_x \left(\frac{1}{1 + \alpha T_p} + \frac{k}{1 + \beta T_p} \right)},$$

а во втором -

$$(x_{\text{АЦП}})_{\max} - (x_{\text{АЦП}})_{\min} = 6K_p K_n \sqrt{\frac{D_x}{1 + \alpha T_p} + \frac{S}{2T_p}}.$$

Учитывая, что длина шкалы квантования по уровню n -разрядного АЦП равна $q(2^n - 1)$, должно выполняться неравенство

$$(x_{\text{АЦП}})_{\max} - (x_{\text{АЦП}})_{\min} \leq q(2^n - 1).$$

Отсюда

$$6K_p K_n \sqrt{D_x \left(\frac{1}{1 + \alpha T_p} + \frac{k}{1 + \beta T_p} \right)} \leq q(2^n - 1) \quad (4.47)$$

в случае помехи с экспоненциальной корреляционной функцией и

$$6K_p K_n \sqrt{\frac{D_x}{1 + \alpha T_p} + \frac{S}{2T_p}} \leq q(2^n - 1) \quad (4.48)$$

в случае помехи типа “белый шум”.

Ошибка квантования по уровню будет тем меньше, чем ближе значения, получаемые в левых частях неравенств (4.47) и (4.48) к значениям, получаемым в правых частях, и будет минимальной при значениях параметров, обращающих неравенства (4.47) и (4.48) в равенства.

При расчете оптимальных параметров операций преобразования измерительной информации в программно-аппаратном измерительном канале необходимо учитывать динамические свойства первичного преобразователя, так как в некоторых случаях он может значительно изменять частотный состав измеряемого сигнала. Исследование зависимости погрешности цифровой обработки измерительной информации от постоянной времени датчика T_p в случае помехи с экспоненциальной корреляционной функцией показало, что при некотором значении постоянной времени T_p погрешность имеет минимальное значение. Это связано с тем, что при определенной инерционности датчик, выполняя функции предварительного аналогового фильтра, наилучшим образом отфильтровывает помеху. При этом с увеличением уровня шума k оптимальное значение постоянной времени первичного преобразователя также увеличивается. При этом, чем более высокочастотной является помеха по отношению к измеряемому сигналу, тем выше точность получаемых с помощью ИК результатов измерений при данных значениях его параметров. Кроме того, оптимальное значение постоянной времени T_p зависит также от периода опроса датчика T_s : чем реже опрашивается датчик, тем меньше должна быть его инерционность.

Была также исследована зависимость оптимального значения постоянной времени цифрового фильтра от постоянной времени датчика. Оказалось, что для небольшой помехи ($k \leq 0.05$) уже сравнительно малая инерционность датчика практически обеспечивает фильтрацию помехи, избавляя от необходимости использования специального фильтра.

Отношение $T_s/T_{f_{opt}}$ с ростом αT_p увеличивается и становится больше 1. Датчик, отфильтровывая помеху, настолько сглаживает и полезный сигнал, что становится необходимым дифференцировать выходной сигнал датчика, чтобы лучше оценить полезную составляющую измеряемого сигнала.

Графики зависимости погрешности цифровой обработки измерительной информации от периода опроса первичного преобразователя представлены на рис. 4.4.

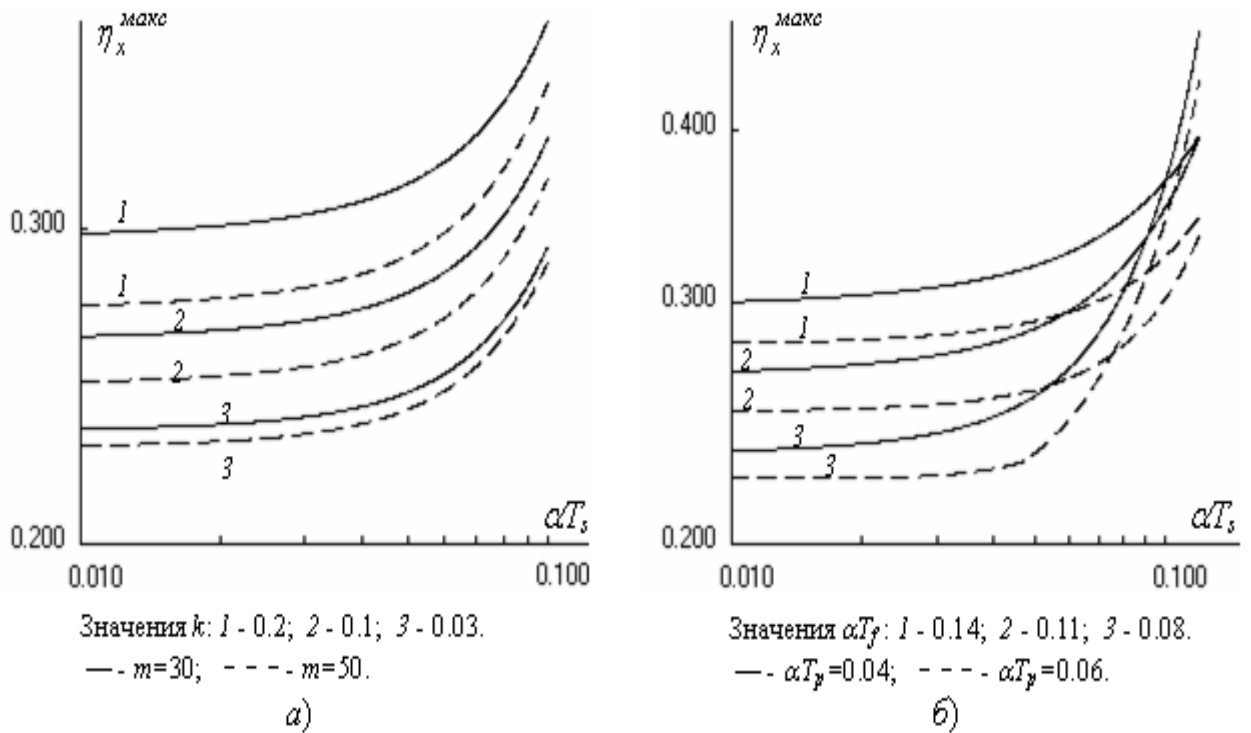


Рис. 4.4. Зависимость относительной среднеквадратической погрешности от периода опроса T_s первичного преобразователя
 а) - при $\alpha T_f=0.1$, $\alpha T_s=0.01$; б) - при $m=50$, $k=0.1$, $\alpha T_s=0.01$.

Следует отметить, что при больших значениях параметра T_s ($\alpha T_s > 0.02$) (см. рис. 4.5) оптимальное значение постоянной времени цифрового фильтра перестает зависеть от параметров помехи. Это, очевидно, происходит из-за того, что при таких значениях периода опроса наиболее существенной становится составляющая общей погрешности, обусловленная неидеальностью восстановления измеряемого сигнала в моменты времени между точками замера.

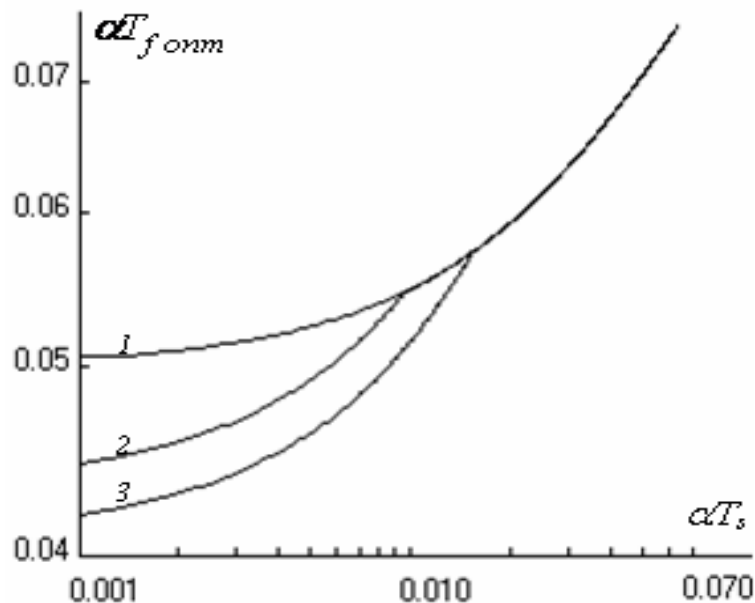


Рис. 4.5. Зависимость оптимального значения постоянной времени T_f цифрового фильтра от периода опроса T_s первичного преобразователя при $k = 0.1$, $\alpha T_p = 0.05$.

Значения m : 1 - 10; 2 - 3; 3 - 100.

Как видно из графиков, представленных на рис. 4.6, оптимальное значение постоянной времени цифрового фильтра зависит не только от параметров полезного сигнала и помехи, но и от значений других параметров измерительного канала - постоянной времени T_p первичного преобразователя и периода его опроса T_s .

Значения параметров канала и сигнала определяют максимально достижимую точность цифровой обработки измерительной информации, при оптимальных параметрах фильтра. Об этом свидетельствуют разные уровни расположения минимумов на приведенных зависимостях (см. рис. 4.5).

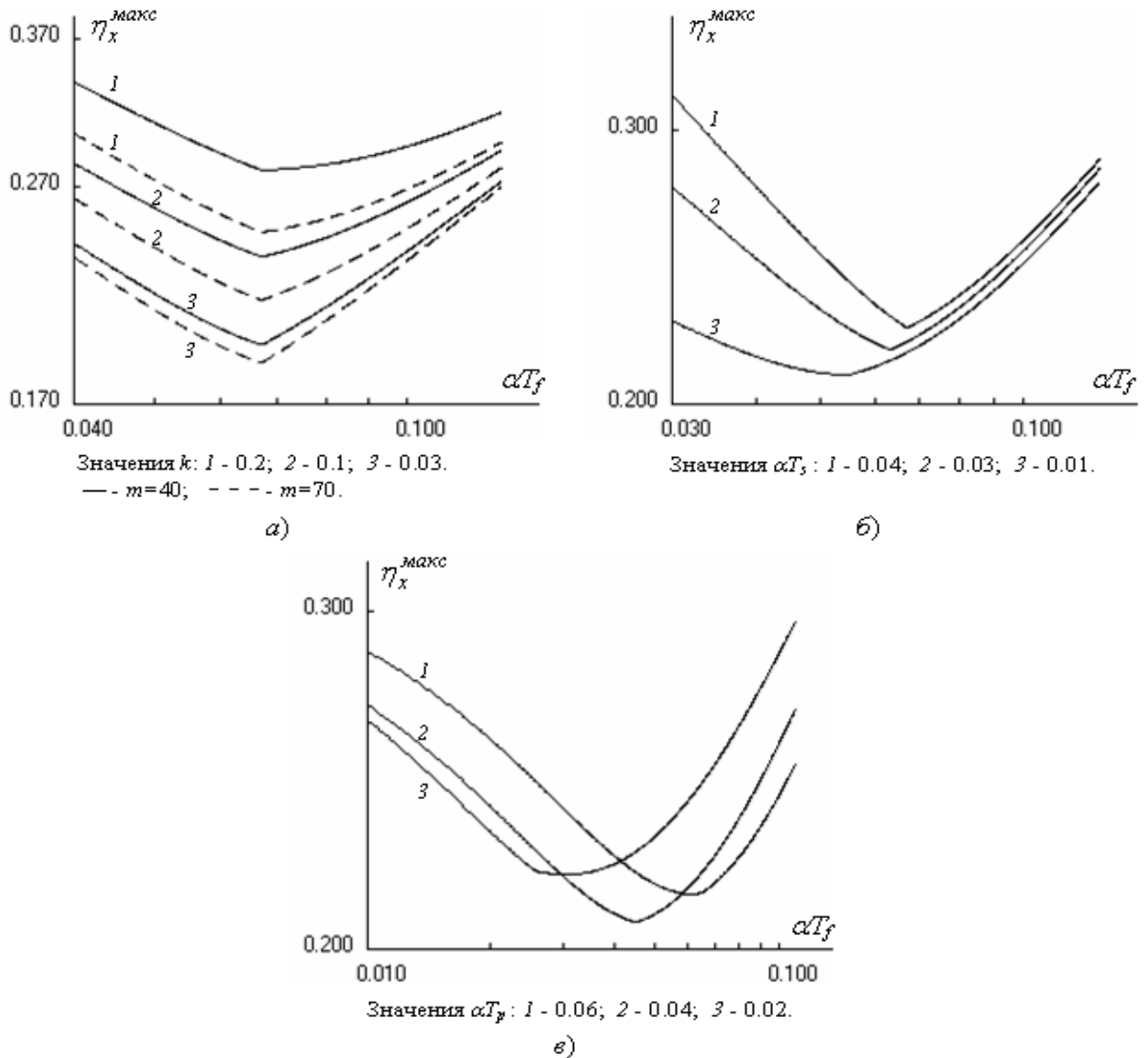


Рис. 4.6. Зависимость относительной среднеквадратической погрешности от постоянной времени T_f цифрового фильтра
 а) - при $\alpha T_s = 0.04$, $\alpha T_p = 0.05$; б) - при $m = 50$, $k = 0.1$, $\alpha T_p = 0.05$; в) - при $m = 50$, $k = 0.1$, $\alpha T_s = 0.01$.

4.4. Методика параметрического синтеза линейных измерительных каналов

После того как была доказана адекватность полученной в третьей главе математической модели, стало возможным ее применение для расчета оптимальных параметров операций преобразования измерительной информации в измерительных каналах автоматизированной системы контроля и управления водоснабжением рыбоводного комплекса.

В результате проведенного исследования математической модели, было установлено следующее:

1. Зависимость точности цифровой обработки измерительной информации в измерительном канале от периода опроса T_s первичного преобразователя не носит экстремального характера. Это означает, что значение периода опроса не может быть определено в результате поиска минимума функции погрешности. Его следует выбирать как можно большим при условии достижения заданной точности цифровой обработки.

2. В отличие от периода опроса T_s зависимость точности результатов измерений от постоянной времени фильтра T_f имеет ярко выраженный минимум, и, следовательно, значение постоянной времени T_f может быть найдено в результате поиска минимума функции погрешности.

Результаты проведенных исследований легли в основу следующей методики параметрического синтеза линейных программно-аппаратных измерительных каналов, обеспечивающих заданную точность предварительной цифровой обработки измерительной информации:

1. Определить характеристики помехи и полезной составляющей измеряемого сигнала, которые рассчитываются либо на основе экспериментальных данных, либо на основе сведений, известных из литературы. Для полезной составляющей определить дисперсию и постоянную затухания корреляционной функции, для помехи - уровень шума и постоянную затухания корреляционной функции (в случае помехи с корреляционной функцией, аппроксимируемой экспонентой) или спектральную плотность (в случае помехи типа “белый шум”).

2. Определить параметры аналоговых измерительных преобразователей: коэффициент усиления K_p и постоянную времени T_p первичного преобразователя, коэффициент усиления K_n нормирующего преобразователя, шаг квантования по уровню в аналого-цифровом преобразователе q . Значения параметров берутся либо из паспортных данных соответствующего преобразователя, либо определяются экспериментально.

3. Подставить значения характеристик измеряемой величины и помехи, а также параметров первичного, нормирующего и аналого-цифрового преобразователей в математическую модель относительной среднеквадратической погрешности [в зависимости от типа помехи выражение (4.27) или (4.28)]. В результате получим выражение для погрешности, как функции двух аргументов - периода опроса первичного преобразователя и постоянной времени цифрового фильтра.

4. Задавшись допустимым значением $\eta_{x\text{ доп}}^{\text{макс}}$ относительной среднеквадратической погрешности цифровой обработки измеряемого сигнала, с помощью алгоритма, описанного в приложении 3, рассчитать оптимальные значения периода опроса T_s первичного преобразователя и постоянной времени T_f цифрового фильтра.

Данная методика была применена на практике для расчета оптимальных параметров алгоритмов преобразования измерительной информации в измерительных каналах АСУ водоснабжением рыбоводного комплекса.

Глава 5

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ИЗМЕРЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛА

В общем случае количество тепла (T) вычисляется путем произведения количества материального потока ($X1$), его теплоемкости ($X2$) и температуры ($X3$):

$$T = X1 * X2 * X3$$

Такое соединение отдельных измерительных каналов принято называть мультипликативным. В главе 3 была получена математическая модель формирования погрешности обработки информации в обобщенной ИИС с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов. Однако практическое использование этой математической модели требует ее детализации, описания внутренней структуры входящих в состав ИИС измерительных каналов. Набор аппаратных и программных компонент, входящих в состав каналов измерительной системы, традиционен, их свойства достаточно подробно изучены, поэтому можно говорить об исследовании типовой ИИС, структура которой наиболее часто встречается в современных АСУТП.

5.1. Внутренняя структура ИИС и математические модели ее компонент

На данном этапе ставится задача получения выражения для относительной дисперсии ошибки измерений в типовой ИИС, содержащей мультипликативную нелинейность. Обобщенная структура такой ИИС была представлена на рис.3.1. На рис. 5.1 представлен типовой информационно-измерительный канал, который является составной частью такой измерительной системы и предназначен для прямого измерения значения некоторой величины $Y_i(t)$, функционально связанной с измеряемым показателем выражением (3.1).

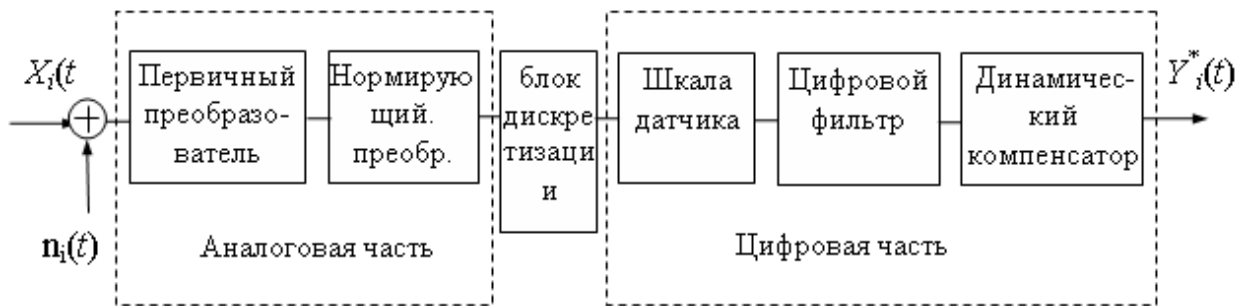


Рис. 5.1. Структура программно-аппаратного канала, входящего в состав типовой ИИС с мультипликативным взаимодействием каналов

Каждый из функциональных блоков, представленных на рис.5.1, имеет собственную динамическую характеристику – весовую функцию, определяющую то преобразование, которое осуществляет данный блок над измеряемым сигналом. Для того, чтобы получить динамические характеристики обобщающих структурных составляющих канала (аналоговой и цифровой части), необходимо выполнить операцию свертки над весовыми функциями тех блоков, которые входят в их состав. Таким образом, эквивалентную весовую функцию аналоговой части канала можно выразить через весовую функцию первичного преобразователя $h_{pi}(t)$ и нормирующего преобразователя $h_{ni}(t)$ следующим образом:

$$h_{ai}(t) = \int_0^t h_{pi}(v) h_{ni}(t-v) dv \quad (5.1)$$

В [20] показано, что первичные преобразователи являются динамическими объектами, которые можно аппроксимировать апериодическими звеньями первого порядка, вследствие чего весовую функцию первичного преобразователя будем использовать в следующем виде:

$$h_{pi}(t) = \frac{K_{pi}}{T_{pi}} e^{-\frac{t}{T_{pi}}}, \quad (5.2)$$

где K_{pi} – коэффициент усиления, характеризующий статические свойства преобразователя, T_{pi} – постоянная времени, определяющая динамику преобразователя, его инерционные свойства. Нормирующий преобразователь в заданной на рис. 5.1 структуре канала является простым усилительным звеном с коэффициентом усиления K_{ni} , поэтому его весовая функция выглядит следующим образом:

$$h_{ni}(t) = K_{ni} \delta(t). \quad (5.3)$$

Основным назначением алгоритма шкалы датчика является компенсация статических преобразований, осуществляемых над измеряемым сигналом в первичном и нормирующем преобразователях. Для

преобразователей, весовые функции которых представлены в (5.2) и (5.3), алгоритм реализации шкалы датчика должен иметь весовую функцию вида [20]:

$$h_s^*(n) = \frac{1}{K_n K_p} \delta^*(n), \quad (5.4)$$

где $\delta^*(n)$ - цифровая функция Дирака.

В качестве фильтра будем использовать экспоненциальный фильтр, который по сравнению с другими программными фильтрами (такими, как статистический фильтр или фильтр скользящего среднего) удобен как простотой реализации, так и небольшим объемом используемой памяти, обеспечивая при этом приемлемое качество фильтрации. Весовая функция экспоненциального фильтра выглядит следующим образом :

$$h_f^*(n) = \begin{cases} \frac{T_s}{T_f} \left(1 - \frac{T_s}{T_f}\right)^n & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Еще одним алгоритмом обработки сигнала в канале является алгоритм компенсации динамических свойств объекта управления. Появление в структуре канала этого функционального блока связано с необходимостью приведения входных параметров объекта управления к его выходным параметрам. В работе [33] отмечено, что многоканальная система, как правило, проводит измерения во многих точках технологического процесса. Поэтому при построении системы, предназначенной для измерений изменяющихся во времени величин, необходимо согласовывать их по временному разрешению. Дело в том, что за счет инерционности объекта управления значения выходных сигналов объекта управления, измеренные в некоторый момент времени t_1 , являются реакцией объекта управления не на значение входных сигналов в этот же момент времени t_1 , а «запоздалой» реакцией на значение входных сигналов в момент времени $t_2 = t_1 - T_c$. Таким образом, в сложных ИИС при расчете технико-экономических показателей зачастую необходимо учитывать транспортное запаздывание сигналов, измеряемых по одному из каналов, по отношению к другому каналу. На рис.5.2 представлена возможная реакция объекта управления на входное воздействие типа «скачок».

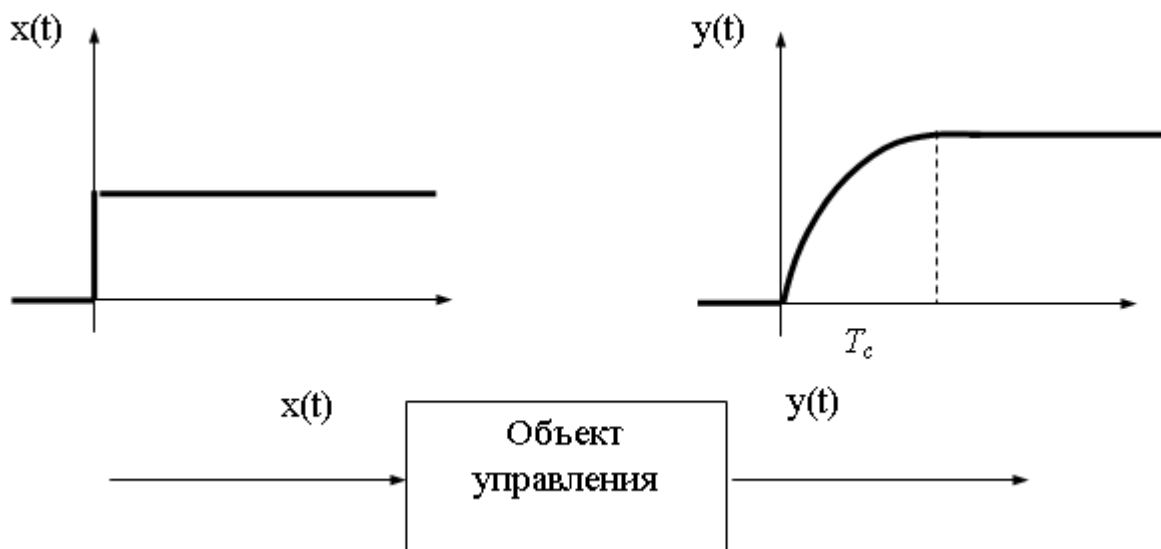


Рис. 5.2. Реакция объекта управления на входное воздействие типа «скачок»

Учет динамических свойств объекта управления осуществляется приведением всех измеряемых сигналов ко входу, что достигается добавлением в структуру измерительного канала дополнительного программного звена – компенсатора динамических свойств объекта управления с весовой функцией, аналогичной весовой функции объекта управления. Однако не всегда удастся достаточно точно идентифицировать передаточную (а следовательно – и весовую) функцию объекта управления. В связи с этим необходимо использовать искусственные приемы компенсации динамической связи: представление динамического звена в виде линейного безынерционного объекта, в виде звена транспортного запаздывания, в виде усреднения измеряемой величины за интервал времени, ограниченный условиями задачи.

Для вывода математической модели типовой ИИС, т.е. в условиях, когда неизвестны свойства объекта управления, единственным способом его идентификации является представление компенсатора в виде звена транспортного запаздывания, т.е. представить динамические свойства объекта можно следующим образом:

$$y(t) = Kx(t - T_c).$$

Таким образом, в качестве динамического компенсатора в канале можно использовать программную реализацию звена чистого запаздывания. В этом случае весовая функция динамического компенсатора будет иметь следующий вид:

$$h_c^*(n) = \delta^*(n - E[\frac{T_c}{T_s}]). \quad (5.6)$$

Для учета динамической связи между величинами и выбора значения T_c необходимо решить уравнение где $K_{xy}(\tau)$ – взаимнокорреляционная функция сигналов $x(t)$ и $y(t)$. В условиях,

$$\frac{\partial K_{xy}(\tau)}{\partial \tau} = 0,$$

когда получить аналитическое выражение для $K_{xy}(\tau)$ затруднительно, величину транспортного запаздывания можно определить по кривой разгона объекта управления.

Восстановление сигналов (преобразование его из дискретной в аналоговую форму) удобно осуществлять методом ступенчатой экстраполяции, когда о значении измеряемой величины в некоторый момент времени t судят по предшествующему этому времени замеру iT_s , для которого $i = E[t/T_s]$. Алгоритм функционирования такого восстанавливающего элемента можно описать формулой :

$$y(t) = x(t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

Недостатком такого метода восстановления является то, что его использование приводит к некоторой дополнительной погрешности, связанной с возможными потерями сигнала на интервале дискретизации T_s . Преимуществами ступенчатой экстраполяции по сравнению с другими методами восстановления (например, линейной экстраполяцией) являются простота реализации и связанное с ней уменьшение использования ресурсов ЭВМ. Весовая функция восстанавливающего элемента, реализующего ступенчатую экстраполяцию, имеет следующий вид:

$$h_r(t) = \delta^* \left(E \left[\frac{t}{T_s} \right] \right) \quad (5.7)$$

Структура канала, входящего в идеальную измерительную систему, представлена на рис. 5.3.

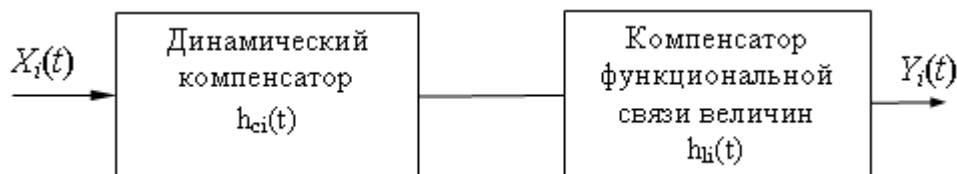


Рис. 5.3. Структура канала, входящего в состав идеальной ИИС с мультипликативным взаимодействием каналов

Из рисунка видно, что в состав идеальной измерительной системы (которая предварительно была линеаризована) входят два компенсатора. Первый компенсатор по своему назначению аналогичен динамическим компенсаторам, входящим в состав реальной системы. Его назначение – компенсация динамических свойств объекта управления, приводящих к временным рассогласованиям сигналов, снимаемых с входов и выходов объекта. Весовая функция динамического компенсатора будет аналогична

выражению (5.6), но для идеального канала ее аргумент должен быть непрерывен:

$$h_c(t) = \delta(t - T_c)$$

Наличие в структуре идеального канала второго компенсатора обусловлено наличием функциональной связи между отдельными каналами при формировании конечного измеряемого системой показателя. Необходимость такого компенсатора была доказана в п. 3.1, а его весовая функция приведена в выражении (3.8).

5.2. Погрешность динамических измерений ИИС при измерении некоррелированных сигналов

Математическую модель относительной среднеквадратичной погрешности обработки информации в ИИС можно получить, подставив выбранные модели структурных составляющих ИИС и измерительной информации в математические модели, полученные в 3 главе для обобщенной ИИС. Весовая функция аналоговой части каждого из каналов будет равна:

$$h_{ai}(t) = \int_0^t \frac{K_{pi}}{T_{pi}} e^{-\frac{v}{T_{pi}}} K_{ni} \delta(t-v) dv = \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{t}{T_{pi}}} \quad (5.8)$$

По известной весовой функции $h_{ai}(t)$ можно выразить корреляционную функцию весовой функции аналоговой части i -го канала, используя выражение (3.37). При этом необходимо учитывать, что при $t < 0$ весовая функция $h_{ai}(t)$ обращается в ноль. Поэтому имеем два случая:

1) При $t \geq 0$.

$$R_{aij}(t) = \int_0^{\infty} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{v}{T_{pi}}} \frac{K_{pj} K_{nj}}{T_{pj}} e^{-\frac{t+v}{T_{pj}}} dv = \frac{K_{pi} K_{ni} K_{pj} K_{nj}}{T_{pi} + T_{pj}} e^{-\frac{t}{T_{pj}}}$$

2) При $t < 0$.

$$R_{aij}(t) = \int_{-t}^{\infty} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{\nu}{T_{pi}}} \frac{K_{pj} K_{nj}}{T_{pj}} e^{-\frac{t+\nu}{T_{pj}}} d\nu = \frac{K_{pi} K_{ni} K_{pj} K_{nj}}{T_{pi} + T_{pj}} e^{-\frac{t}{T_{pi}}}$$

Приведенные выражения свидетельствуют, что функция $R_{aij}(t)$ является несимметричной в том случае, когда $i \neq j$. Если же $i=j$, то функция $R_{aij}(t)$ будет симметричной и выражение для этой функции примет вид:

$$R_{ai}(t) = \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2}{2T_{pi}} e^{-\frac{|t|}{T_{pi}}} \quad (5.9)$$

Выразив корреляционную функцию весовых функций аналоговых частей i -го и j -го каналов, можно получить выражение для корреляционной функции сигналов на выходе аналоговой части i -го и j -го каналов. Из выражения (3.38) имеем:

$$K_{Yaij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Xaij}(\nu) R_{aij}(t - \nu) d\nu$$

Рассмотрим случай некоррелированных входных сигналов ИИС, то есть $K_{Xaij}(t) = 0$ при $i \neq j$, тогда последнее выражение можно переписать в виде:

$$K_{Yai}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Xai}(\nu) R_{ai}(t - \nu) d\nu,$$

где $R_{ai}(t)$ выражается по формуле (5.9). Для того чтобы получить выражение для корреляционной функции $K_{Xai}(t)$, необходимо задаться типом входных параметров ИИС и типом воздействующих на них помех. В качестве математической модели помехи $n_i(t)$, накладываемой на полезный сигнал, будем использовать «белый шум», позволяющий оценить помеху по верхней границе.

Найдем выражение для корреляционной функции сигнала на входе аналоговой части i -го канала. По определению:

$$K_{X_{ai}}(t) = M \left\{ \overset{\circ}{X}_{ai}(\tau) \overset{\circ}{X}_{ai}(\tau+t) \right\} = K_{X_i}(t) + S_i \delta(t) \quad (5.10)$$

Подставляя (1.20) и (3.10) в последнее выражение для $K_{Y_{ai}}(t)$, имеем:

$$K_{Y_{ai}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(D_{xi} e^{-\alpha_i |v|} + S_i \delta(v) \right) \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2}{2T_{pi}} e^{-\frac{|t-v|}{T_{pi}}} dv.$$

Для любого t выражение для корреляционной функции сигналов на выходе аналоговой части канала можно представить в виде:

$$K_{Y_{ai}}(t) = \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 D_{xi}}{\left((\alpha_i T_{pi})^2 - 1 \right)} \left(\alpha_i T_{pi} e^{-\frac{|t|}{T_{pi}}} - e^{-\alpha_i |t|} \right) + \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 S_i}{2T_{pi}} e^{-\frac{|t|}{T_{pi}}} \quad (5.11)$$

Для того чтобы найти выражение для эквивалентной весовой функции цифровой части канала, необходимо подвергнуть операции свертки весовые функции составляющих ее звеньев:

$$h_d^*(n) = h_s^*(n) * h_f^*(n) * h_c^*(n),$$

где $h_d^*(n)$ -эквивалентная весовая функция цифровой части, $h_s^*(n)$ – весовая функция шкалы датчика, $h_f^*(n)$ – весовая функция цифрового фильтра, $h_c^*(n)$ - весовая функция динамического компенсатора.

Подвергнем весовые функции, приведенные в выражениях (5.4)-(5.6), операции свертки для определения эквивалентной весовой функции i -го канала. Свертка весовых функций алгоритма реализации датчика и цифрового фильтра дает следующее выражение:

$$h_{sfi}^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{si}^*(k) h_{fi}^*(n-k) = \begin{cases} \frac{1}{K_{ni} K_{pi} T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^n & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

Тогда эквивалентная функция цифровой части i -го канала выражается следующим образом:

$$h_{di}^*(n) = \sum_{k=0}^n h_{sfi}^*(k) h_{ci}^*(n-k) = \begin{cases} \frac{1}{K_{ni} K_{pi} T_{fi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{n - E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} & \text{при } n \geq E[\frac{T_{ci}}{T_s}] \\ 0 & \text{при } n < E[\frac{T_{ci}}{T_s}] \end{cases}$$

Выразим эквивалентную весовую функцию цифровой части канала и восстанавливающего элемента, используя выражение (3.32).

Тогда, согласно (3.32), имеем:

$$h_{wi}(t) = \sum_{l=0}^{E[t/T_s]} h_{di}^*(l) h_r(t - l T_s) = \begin{cases} \frac{1}{K_{ni} K_{pi} T_{fi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{E[\frac{t}{T_s}] - E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} & \text{при } t \geq T_{ci} \\ 0 & \text{при } t < T_{ci} \end{cases}$$

Далее необходимо выразить корреляционную функцию полученной эквивалентной весовой функции $h_{wi}(t)$, используя выражение (2.39).

$$R_{wi}^*(m, t) = \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wi}(t - k T_s) h_{wi}(t + m T_s - k T_s)$$

В связи с тем, что $h_{wi}(t)=0$ при $t < T_{ci}$, необходимо рассмотреть два случая.

При $m \geq E[T_{ci}/T_s]$ имеем:

$$R_{wi}^*(m, t) = \sum_{k=-\infty}^m \left(\frac{1}{K_{ni} K_{pi} T_{fi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{2 \left(E[\frac{t}{T_s}] - E[\frac{T_{ci}}{T_s}] \right) + m} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-2k}$$

Учитывая, что $E[t/T_s]=m$, последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$R_{wi}^*(m, t) = \left(\frac{1}{K_{ni} K_{pi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{3m - 2E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]} \sum_{k=-\infty}^m \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2k}$$

Выражение $\sum_{k=-\infty}^m \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2k}$ представляет сумму бесконечной

геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^2$. Очевидно, что

$q < 1$, так как всегда выполняется неравенство $T_s < T_{fi}$. В таком случае сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна:

$$\sum_{k=-\infty}^m \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2k} = \frac{T_{fi}^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-m}}{2T_{fi}T_s - T_s^2}$$

Тогда имеем:

$$R_{wi}^*(m, t) = \frac{T_s}{K_{ni}^2 K_{pi}^2 (2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{m - 2E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]}$$

При $m < E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]$ имеем:

$$\begin{aligned} R_{wi}^*(m, t) &= \sum_{k=-\infty}^{2m} \left(\frac{1}{K_{ni} K_{pi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^2 \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{2\left(E\left[\frac{t}{T_s}\right] - E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]\right) + m} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2k} = \\ &= \frac{T_s}{K_{ni}^2 K_{pi}^2 (2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-m - 2E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]} \end{aligned}$$

Обобщая полученные выражения для $R_{wi}^*(m, t)$, получим следующее выражение:

$$R_{wi}^*(m, t) = \frac{T_s}{K_{ni}^2 K_{pi}^2 (2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{|m| - 2E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \quad (5.12)$$

Тогда математическое ожидание сигнала, измеренного реальной ИИС, равно:

$$\begin{aligned} M_Z &= \sum_{i=1}^N A_i M_{X_{ai}} \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]kT_s} \int_{-\infty}^{kT_s - v} h_{ai}(kT_s - v) dv h_{wi}(t - kT_s) = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i M_{X_i} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Используя полученные выражения для корреляционной функции сигнала на выходе аналоговой части i -го канала (5.10), а также для корреляционной функции эквивалентной весовой функции цифровой части этого же канала (выражение (5.12)), можно получить выражение для дисперсии сигнала на выходе i -го канала. Согласно (3.40) имеем:

$$\begin{aligned} D_z &= \sum_{i=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_i^2 \frac{T_s}{K_{ni}^2 K_{pi}^2 (2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{|m| - 2E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \times \\ &\times \left(\left(\frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 D_{xi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \left(\alpha_i T_{pi} e^{\frac{|mT_s|}{T_{pi}}} - e^{-\alpha_i |mT_s|} \right) + \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 S_i}{2T_{pi}} e^{-\frac{|mT_s|}{T_{pi}}} \right) = \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{T_s}{(2T_{fi} - T_s)} \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-2E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \left[\left(\frac{S_i}{2T_{pi}} + \frac{D_{xi} \alpha_i T_{pi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{T_s}{T_{pi}} |m|} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{|m|} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{D_{xi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_i |mT_s|} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{|m|} \right] \right] \end{aligned}$$

Стоящие под знаком суммирования выражения представляют собой

геометрические прогрессии, знаменатели которых $q_1 = e^{-\frac{T_s}{T_{pi}}}$ и

$q_2 = e^{-\alpha_i \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)}$; причем, так как всегда выполняется неравенство $T_s < T_{fi}$,

очевидно, что всегда выполняются неравенства $q_1 < 1$ и $q_2 < 1$. В связи с чем можно вычислить сумму бесконечного количества членов обеих прогрессий и представить выражение для дисперсии D_z в виде:

$$D_z = \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{T_s}{(2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-2E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{S_i}{2T_{pi}} + \frac{D_{xi} \alpha_i T_{pi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \right) \frac{T_{fi} + e^{-T_s/T_{pi}} (T_f - T_s)}{T_{fi} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_f - T_s)} - \frac{D_{xi}}{((\alpha_i T_{pi})^2 - 1)} \right]$$

$$\left[\frac{T_{fi} + e^{-\alpha_i T_s} (T_f - T_s)}{T_{fi} - e^{-\alpha_i T_s} (T_f - T_s)} \right] \quad (5.14)$$

Зная весовые функции составляющих канал звеньев, можно выразить эквивалентную весовую функцию идеального канала:

$$h_i(t) = h_{ci}(t) * h_{li}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(v - T_{ci}) A_i \delta(t - v) dv = A_i \delta(t - T_{ci})$$

Математическое ожидание сигнала, измеренного идеальной ИИС, равно:

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^N M_{Xi} \int_{-\infty}^t A_i \delta(v - T_{ci}) dv = \sum_{i=1}^N A_i M_{Xi}$$

Тогда математическое ожидание случайной функции ошибки обработки информации в ИИС будет равно:

$$M_E(t) = M_Z(t) - M_Y(t) = 0,$$

что означает отсутствие систематической составляющей погрешности цифровой обработки информации в ИИС.

Корреляционная функция эквивалентной весовой функции i -го идеального канала, согласно (3.24), равна:

$$R_i(t) = \int_0^{\infty} A_i \delta(v - T_{ci}) A_i \delta(v + t - T_{ci}) dv = A_i^2 \delta(-t)$$

Подставляя полученное выражение для $R_i(t)$ в (3.23), получим выражение для дисперсии сигнала на выходе идеальной ИИС:

$$D_Y = \sum_{i=1}^N A_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{Xi}(\vartheta) \delta(\vartheta) d\vartheta = \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{Xi} \quad (5.15)$$

Взаимная корреляционная функция эквивалентных весовых функций аналоговой части реального канала и идеального канала равна:

$$R_{agi}(t) = \int_0^{\infty} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{v}{T_{pi}}} \delta(v + t - T_{ci}) dv = \begin{cases} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{t - T_{ci}}{T_{pi}}} & \text{при } t \geq T_{ci} \\ 0 & \text{при } t < T_{ci} \end{cases}$$

Найдем корреляционную функцию сигнала на входе аналоговой части i -го канала $X_{ai}(t) = X_i(t) + n_i(t)$ и сигнала на входе i -го идеального канала $X_i(t)$:

$$K_{Xai}(t) = M \left\{ \overset{\circ}{X}_{ai}(\tau) \overset{\circ}{X}_i(\tau + t) \right\} = M \left\{ \left(\overset{\circ}{X}_i(\tau) + \overset{\circ}{n}_i(\tau) \right) \overset{\circ}{X}_i(\tau + t) \right\} =$$

$$= M \left\{ \dot{X}_i(\tau) \dot{X}_i(\tau+t) \right\} + M \left\{ \dot{X}_i(\tau+t) \dot{n}_i(\tau) \right\} = K_{X_i}(t)$$

Тогда можно выразить корреляционную функцию сигналов на выходе аналоговой части i -го реального канала и на выходе идеального i -го канала:

$$K_{Y_{ai}Y_i}(t) = \int_{-\infty}^{t-T_{ci}} D_{X_i} e^{-\alpha_i|\vartheta|} \frac{K_{p_i}K_{n_i}}{T_{p_i}} e^{-\frac{t-T_{ci}-\vartheta}{T_{p_i}}} d\vartheta$$

Рассмотрим два случая:

При $t < T_{ci}$

$$K_{Y_{ai}Y_i}(t) = \int_{-\infty}^{t-T_{ci}} D_{X_i} e^{\alpha_i\vartheta} \frac{K_{p_i}K_{n_i}}{T_{p_i}} e^{-\frac{t-T_{ci}-\vartheta}{T_{p_i}}} d\vartheta = \frac{K_{p_i}K_{n_i}D_{X_i}}{\alpha_i T_{p_i} + 1} e^{-\alpha_i(t-T_{ci})}$$

При $t \geq T_{ci}$

$$K_{Y_{ai}Y_i}(t) = \int_{-\infty}^0 D_{X_i} e^{\alpha_i\vartheta} \frac{K_{p_i}K_{n_i}}{T_{p_i}} e^{-\frac{t-T_{ci}-\vartheta}{T_{p_i}}} d\vartheta + \int_0^{t-T_{ci}} D_{X_i} e^{-\alpha_i\vartheta} \frac{K_{p_i}K_{n_i}}{T_{p_i}} e^{-\frac{t-T_{ci}-\vartheta}{T_{p_i}}} d\vartheta =$$

$$= \frac{K_{p_i}K_{n_i}D_{X_i}}{T_{p_i}} e^{-\frac{t-T_{ci}}{T_{p_i}}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\vartheta(\alpha_i + \frac{1}{T_{p_i}})} d\vartheta + \int_0^{t-T_{ci}} e^{\vartheta(-\alpha_i + \frac{1}{T_{p_i}})} d\vartheta \right) = \frac{K_{p_i}K_{n_i}D_{X_i}}{\alpha_i T_{p_i} - 1} \times$$

$$\times \left(\frac{2\alpha_i T_{p_i}}{\alpha_i T_{p_i} + 1} e^{-\frac{t-T_{ci}}{T_{p_i}}} - e^{-\alpha_i(t-T_{ci})} \right)$$

Подставляя полученное выражение для корреляционной функции $K_{YaiYi}(t)$ в (3.42), получим выражение для корреляционной функции сигналов на выходе реальной ИИС и на выходе идеальной ИИС:

$$K_{ZY}(t,t) = \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{1}{K_{ni} K_{pi}} \frac{T_s}{T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{E[\frac{t-kT_s}{T_s}] - E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \frac{K_{pi} K_{ni} D_{Xi}}{\alpha_i T_{pi}^{-1}} \times$$

$$\times \left(\frac{2\alpha_i T_{pi}}{\alpha_i T_{pi} + 1} e^{-\frac{t - T_{ci} - kT_s}{T_{pi}}} - e^{-\alpha_i(t - T_{ci} - kT_s)} \right) \quad (5.16)$$

В последнем выражении, раскрывая скобки и группируя все слагаемые и сомножители, зависящие от k , получим под знаками суммирования бесконечное количество членов геометрической прогрессии со знаменателями

$$q_1 = \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right) e^{-\frac{T_s}{T_{pi}}} \quad \text{и} \quad q_2 = \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right) e^{-\alpha_i T_s}. \quad \text{Очевидно, что } q_1 < 1 \text{ и } q_2 < 1,$$

следовательно, можно вычислить сумму бесконечного количества членов таких прогрессий. Подставляя полученные значения сумм в выражение (5.16), имеем следующее конечное выражение для $K_{ZY}(t,t)$:

$$K_{ZY}(t,t) = \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{Xi} \frac{T_s}{\alpha_i T_{pi}^{-1}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \times$$

$$\times \left(\frac{2\alpha_i T_{pi}}{\alpha_i T_{pi} + 1} \frac{e^{\left(\frac{E[t/T_s]T_s - t + T_{ci}\right)/T_{pi}}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-T_s/T_{pi}}} - \frac{e^{\alpha_i(E[t/T_s]T_s - t + T_{ci})}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-\alpha_i T_s}} \right)$$

Принципиальной особенностью полученного выражения для $K_{ZY}(t,t)$ является его зависимость от текущего момента времени t , чего не

наблюдалось в выражениях для D_Z и D_Y . Необходимо отметить, что в качестве аргумента функции $K_{ZY}(t, t)$ удобнее использовать не текущее время t , а величину

$$\tau = t - E[t/T_s]T_s, \quad (5.17)$$

которая не обращается в ноль вследствие не кратности (в общем случае) текущего времени t величине периода опроса датчика T_s .

Таким образом, получены выражения для всех слагаемых дисперсии ошибки измерения ИИС [см. выражение(3.18)]. Прежде чем объединить их в общее выражение, необходимо сделать небольшое уточнение относительно коэффициента A_i , который, как уже было показано, появляется вследствие линеаризации операции умножения и отражает функциональную взаимосвязь сигналов в различных каналах при формировании значения технико-экономического параметра. Ранее этот коэффициент был определен следующим образом:

$$A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j \quad (5.18)$$

В приведенном выражении M_j есть математическое ожидание непосредственно перемножаемых сигналов. В исследуемой ИИС перемножаются сигналы на выходах каналов $Z_i(t)$ (см. рис.5.1) и $Y_i(t)$ (см. рис.5.3). Очевидно, что, имея в качестве исходных параметров при исследованиях характеристики сигналов на входе ИИС $X_i(t)$, необходимо выразить каждый из M_j в (5.18) как функцию от математического ожидания соответствующего входного сигнала M_{X_j} . Для этого вычислим математическое ожидание случайных функций, стоящих слева и справа от знака равенства в выражении (3.28), отражающем взаимосвязь перемножаемого сигнала $Z_i(t)$ и сигнала на входе канала $X_{ai}(t)$:

$$M_i = \sum_{k=-\infty}^n \left(\int_{-\infty}^{kT_s} M \{ X_{ai}(\nu) \} h_{ai}(kT_s - \nu) d\nu \right) h_{ai}^*(n-k) =$$

$$\begin{aligned}
&= M_{X_i} \sum_{k=-\infty}^{n-E[T_c/T_s]} \int_{-\infty}^{kT_s} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{kT_s - \nu}{T_{pi}}} d\nu \frac{1}{K_{ni} K_{pi} T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{n-k-E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} = \\
&= M_{X_i} \sum_{k=-\infty}^{n-E[T_c/T_s]} \frac{T_s}{T_{fi}} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{n-k-E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} = M_{X_i}
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что математическое ожидание сигнала на выходе цифровой части канала $Y_i^*(n)$ равно математическому ожиданию сигнала на входе канала $X_i(t)$ и в выражении (5.18) вместо M_j можно использовать M_{X_j} .

Дисперсия функции ошибки измерений в ИИС в случае некоррелированности измеряемых по различным каналам сигналов и воздействия на них помехи типа «белый шум» равна:

$$\begin{aligned}
D_E(\tau) &= \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{X_i} - 2 \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{X_i} \frac{T_s}{\alpha_i T_{pi} - 1} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \times \\
&\times \left[\frac{2\alpha_i T_{pi}}{\alpha_i T_{pi} + 1} \frac{e^{-(\tau + T_{ci})/T_{pi}}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-T_s/T_{pi}}} - \frac{e^{-\alpha_i(\tau + T_{ci})}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-\alpha_i T_s}} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{T_s}{(2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{-2E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \\
&\left[\left(\frac{S_i}{2T_{pi}} + \frac{\alpha_i T_{pi} D_{X_i}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \right) \frac{T_{fi} + e^{-T_s/T_{pi}} (T_f - T_s)}{T_{fi} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_f - T_s)} - \right. \\
&\left. - \frac{D_{X_i}}{((\alpha_i T_{pi})^2 - 1)} \frac{T_{fi} + e^{-\alpha_i T_s} (T_f - T_s)}{T_{fi} - e^{-\alpha_i T_s} (T_f - T_s)} \right] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Рассмотрим измерительную систему, на которую воздействуют коррелированные помехи. Как уже упоминалось, коррелированной помехой будем считать случайный процесс, некоррелированный с входными сигналами системы и имеющий корреляционную функцию вида:

$$K_n(t) = D_n e^{-\beta|t|},$$

где D_n - дисперсия помехи, а β - скорость помехи. При этом по-прежнему полагаем, что входные сигналы системы некоррелированы между собой.

В этом случае корреляционная функция сигнала на входе аналоговой части канала будет равна [см.(5.10)]:

$$K_{Xai}(t) = D_{Xi} e^{-\alpha_i|t|} + D_{ni} e^{-\beta_i|t|} \quad (5.20)$$

Корреляционная функция сигнала на выходе аналоговой части канала реальной системы также изменится. Опуская вывод выражения для $K_{Yai}(t)$, который аналогичен рассмотренному выше для некоррелированной помехи, получаем:

$$\begin{aligned} K_{Yai}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(D_{Xi} e^{-\alpha_i|v|} + D_{ni} e^{-\beta_i|t|} \right) \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2}{2T_{pi}} e^{-\frac{|t-v|}{T_{pi}}} dv = \\ &= \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 D_{Xi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \begin{pmatrix} e^{-\frac{|t|}{T_{pi}}} & \\ & -e^{-\alpha_i|t|} \end{pmatrix} + \frac{K_{pi}^2 K_{ni}^2 D_{ni}}{(\beta_i T_{pi})^2 - 1} \begin{pmatrix} e^{-\frac{|t|}{T_{pi}}} & \\ & -e^{-\beta_i|t|} \end{pmatrix} \quad (5.21) \end{aligned}$$

Подставляя (5.21) в (3.38), получаем выражение для дисперсии сигнала на выходе идеальной ИИС:

$$D_z = \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{T_s}{(2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2E[\frac{T_{ci}}{T_s}]} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{\beta_i T_{pi} D_{ni} + \alpha_i T_{pi} D_{xi}}{(\beta_i T_{pi})^2 - 1} + \frac{\alpha_i T_{pi} D_{xi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \right) \frac{T_{fi} + e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fi} - T_s)} - \frac{D_{xi}}{\left((\alpha_i T_{pi})^2 - 1 \right)} \right. \\
& \left. \times \frac{T_{fi} + e^{-\alpha_i T_s} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-\alpha_i T_s} (T_{fi} - T_s)} - \frac{D_{ni}}{\left((\beta_i T_{pi})^2 - 1 \right)} \frac{T_{fi} + e^{-\beta_i T_s} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-\beta_i T_s} (T_{fi} - T_s)} \right] \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Два других слагаемых дисперсии функции ошибки обработки информации – дисперсия сигнала на выходе идеальной ИИС D_Y и взаимнокорреляционная функция измеренного и истинного значения измеряемого параметра $K_{YZ}(0)$ - не зависят от типа воздействующих на них помех (это очевидно из (5.15) и (5.16)), следовательно дисперсию функции ошибки $D_E(\tau)$ в случае воздействия на измерительную систему коррелированных помех можно выразить по формуле (3.18), подставив в нее выражения (5.15), (5.16) и (5.22).

$$\begin{aligned}
D_E(\tau) &= \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{Xi} \sum_{i=1}^N A_i^2 \frac{T_s}{(2T_{fi} - T_s)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-2E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]} \times \\
& \times \left[\left(\frac{\beta_i T_{pi} D_{ni} + \alpha_i T_{pi} D_{xi}}{(\beta_i T_{pi})^2 - 1} + \frac{\alpha_i T_{pi} D_{xi}}{(\alpha_i T_{pi})^2 - 1} \right) \frac{T_{fi} + e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fi} - T_s)} - \frac{D_{xi}}{\left((\alpha_i T_{pi})^2 - 1 \right)} \right. \\
& \left. - \frac{D_{ni}}{\left((\beta_i T_{pi})^2 - 1 \right)} \frac{T_{fi} + e^{-\beta_i T_s} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-\beta_i T_s} (T_{fi} - T_s)} \right] - 2 \sum_{i=1}^N A_i^2 D_{Xi} \frac{T_s}{\alpha_i T_{pi} - 1} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-E\left[\frac{T_{ci}}{T_s}\right]} \times \\
& \frac{T_{fi} + e^{-\alpha_i T_s} (T_{fi} - T_s)}{T_{fi} - e^{-\alpha_i T_s} (T_{fi} - T_s)}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{2\alpha_i T_{pi}}{\alpha_i T_{pi} + 1} \frac{e^{-(\tau + T_{ci})/T_{pi}}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-T_s/T_f}} - \frac{e^{-\alpha_i(\tau + T_{ci})}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s)e^{-\alpha_i T_s}} \right) \quad (5.23)$$

5.3. Погрешность динамических измерений ИИС при измерении коррелированных сигналов

Приведенные выше математические модели выводились в предположении о некоррелированности измеряемых различными каналами технологических параметров. Однако обычно в рамках комплексных (в нашем случае – мультипликативных) ИИС измеряются значения параметров одного и того же технологического процесса, которые, очевидно, могут быть коррелированы между собой. Так, например, зная простейшие законы физики, можно утверждать, что изменение напряжения в какой-то точке электрической цепи приводит к изменению тока. Отсюда очевидно, что, перемножая эти сигналы, мы обязательно должны учесть их взаимосвязь. Таким образом, встает проблема оценки влияния корреляции сигналов, измеряемых различными ИИК в рамках ИИС, на величину относительной погрешности измерения. То, что такое влияние существует, видно из (3.40) и (3.42), где отражена функциональная зависимость между корреляционными функциями входных и выходных сигналов i -го и j -го измерительных каналов и отдельными слагаемыми дисперсии ошибки обработки информации.

Вид взаимнокорреляционной функции измеряемых системой сигналов является индивидуальной характеристикой для каждого отдельного технологического процесса. Однако для предварительной оценки погрешности обработки информации в ИИС аппроксимируем корреляционную функцию экспонентой вида:

$$K_{Xij}(t) = D_{Xij} e^{-\alpha_{ij}|t|}$$

Тогда корреляционная функция сигналов на входах i -го и j -го каналов будет равна:

$$\begin{aligned}
 K_{X_{aij}}(t) &= M \left\{ \overset{\circ}{X}_{ai}(\tau) \overset{\circ}{X}_{aj}(\tau+t) \right\} = M \left\{ \left(\overset{\circ}{X}_i(\tau) + \overset{\circ}{n}_i(\tau) \right) \times \left(\overset{\circ}{X}_j(\tau+t) + \overset{\circ}{n}_j(\tau+t) \right) \right\} = \\
 &= M \left\{ \overset{\circ}{X}_i(\tau) \overset{\circ}{X}_j(\tau+t) \right\} + M \left\{ \overset{\circ}{X}_i(\tau) \overset{\circ}{n}_j(\tau+t) \right\} + M \left\{ \overset{\circ}{X}_j(\tau+t) \overset{\circ}{n}_i(\tau) \right\} + \\
 &\quad + M \left\{ \overset{\circ}{n}_i(\tau) \overset{\circ}{n}_j(\tau+t) \right\} = K_{X_{ij}}(t) + S_{ij} \delta(t) \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

При выводе последнего выражения по-прежнему считаем, что полезный сигнал и воздействующие на него помехи некоррелированы между собой; в связи с чем

Тогда, согласно (3.38), для корреляционной функции сигналов на

$$S_{ij} = \begin{cases} S_i, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

выходах аналоговой части i -го и j -го каналов имеем:

$$K_{Y_{aij}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(D_{X_{ij}} e^{-\alpha_{ij}|\nu|} + S_{ij} \delta(\nu) \right) R_{aij}(t-\nu) d\nu.$$

Однако, как уже отмечалось выше, при $i \neq j$ корреляционная функция весовых функций аналоговых частей i -го и j -го каналов становится несимметричной. Поэтому и выражение для $K_{Y_{aij}}(t)$ становится несимметричным:

$$K_{Y_{aij}}(t) = K D_{X_{ij}} \left(\frac{2\alpha_{ij} T_p^2(t)}{(\alpha_{ij} T_p(t))^2 - 1} e^{-\frac{|t|}{T_p(t)}} + \frac{T_p(t)}{(\alpha_{ij} T_p(t))^2 - 1} e^{-\alpha_{ij} |t|} \right) + K S_{ij} e^{-\frac{|t|}{T_p(t)}}, \quad (5.25)$$

где $K = \frac{K_{pi} K_{ni} K_{pj} K_{nj}}{T_{pi} + T_{pj}}$, а функция $T_p(t)$ характеризует несимметричность

$K_{Y_{aij}}(t)$:

$$T_p(t) = \begin{cases} T_{pj} & \text{при } t < 0 \\ T_{pi} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Корреляционная функция эквивалентных весовых функций $h_{wn}(t)$ i -го и j -го каналов, согласно (3.39), равна:

$$\begin{aligned} R_{wij}^*(m, t) &= \sum_{k=-\infty}^{E[t/T_s]} h_{wi}(t - k T_s) h_{wj}(t + m T_s - k T_s) = \\ &= \frac{T_s^2}{K_{ni} K_{pi} K_{nj} K_{pj} (T_{fi} T_s + T_{fj} T_s - T_s^2)} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}}\right)^{|m| - E[\frac{T_{cj}}{T_s}]} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fj}}\right)^{-E[\frac{T_{cj}}{T_s}]} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Используя выражение (3.35), выразим дисперсию сигнала на выходе реальной ИИС:

$$\begin{aligned} D_z &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \frac{T_s (1 - T_s/T_{fi})^{-E[T_{ci}/T_s]} (1 - T_s/T_{fj})^{-E[T_{cj}/T_s]}}{(T_{fi} + T_{fj} - T_s)(T_{pi} + T_{pj})} \times \\ &\times \left(S_{ij} \left[\frac{T_{fj}}{T_{fj} - (T_{fj} - T_s)e^{-T_s/T_{pi}}} + \frac{(T_{fj} - T_s)e^{-T_s/T_{pi}}}{T_{fj} - (T_{fj} - T_s)e^{-T_s/T_{pi}}} \right] + \right. \\ &+ D_{Xij} \left[\frac{2\alpha_{ij} T_{pi}^2}{(\alpha_{ij} T_{pi})^2 - 1} \frac{T_{fj}}{T_{fj} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fj} - T_s)} + \frac{2\alpha_{ij} T_{pj}^2}{(\alpha_{ij} T_{pj})^2 - 1} \frac{(T_{fj} - T_s)e^{-T_s/T_{pj}}}{T_{fj} - e^{-T_s/T_{pj}} (T_{fj} - T_s)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{2T_{pi}}{(\alpha_{ij} T_{pi})^2 - 1} \frac{T_{fj}}{T_{fj} - e^{-\alpha_{ij} T_s} (T_{fj} - T_s)} + \frac{2T_{pj}}{(\alpha_{ij} T_{pj})^2 - 1} \frac{(T_{fj} - T_s)e^{-\alpha_{ij} T_s}}{T_{fj} - e^{-\alpha_{ij} T_s} (T_{fj} - T_s)} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Для того, чтобы выразить дисперсию сигнала на выходе идеальной ИИС, найдем корреляционную функцию эквивалентных весовых функций i -го и j -го идеальных каналов. Согласно (3.24) имеем:

$$R_{ij}(t) = \int_0^{\infty} A_i \delta(v - T_{ci}) A_j \delta(v + t - T_{ci}) dv = A_i^2 \delta(-t)$$

Тогда, учитывая (3.23), получаем:

$$D_Y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \int_{-\infty}^{\infty} D_{Xij} e^{-\vartheta \alpha_{ij}} \delta(-\vartheta) d\vartheta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j D_{Xij} \quad (5.28)$$

Третье слагаемое дисперсии функции ошибки – корреляционная функция сигналов на выходе реальной и идеальной ИИС, выражение для которой приведено в (3.42). Предварительно необходимо выразить корреляционную функцию весовой функций аналоговой части i -го канала реальной ИИС и весовой функции j -го канала идеальной ИИС.

$$R_{aigj}(t) = \int_0^{\infty} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{\nu}{T_{pi}}} \delta(\nu + t - T_{cj}) d\nu = \begin{cases} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{t - T_{cj}}{T_{pi}}} & \text{при } t \geq T_{cj} \\ 0 & \text{при } t < T_{cj} \end{cases}$$

Корреляционная функция сигналов на входе аналоговой части i -го канала реальной ИИС и на входе j -го канала идеальной ИИС по определению равна:

$$K_{XaiXj}(t) = M \left\{ \overset{\circ}{X}_{ai}(\tau) \overset{\circ}{X}_j(\tau + t) \right\} = M \left\{ \left(\overset{\circ}{X}_{ai}(\tau) + \overset{\circ}{n}_i(\tau) \right) \times \left(\overset{\circ}{X}_j(\tau + t) \right) \right\} = K_{XiXj}(t)$$

Тогда для корреляционной функции сигналов на выходе аналоговой части i -го канала реальной ИИС и на выходе j -го канала идеальной ИИС имеем:

$$K_{YaiYj}(t) = \int_{-\infty}^{t - T_{cj}} D_{Xij} e^{\alpha_{ij}|\vartheta|} \frac{K_{pi} K_{ni}}{T_{pi}} e^{-\frac{t - T_{cj} - \vartheta}{T_{pi}}} d\vartheta = \frac{K_{pi} K_{ni} D_{Xij}}{\alpha_{ij} T_{pi} - 1} \times \left(\frac{2\alpha_{ij} T_{pi}}{\alpha_{ij} T_{pi} + 1} e^{-\frac{t - T_{cj}}{T_{pi}}} - e^{-\alpha_{ij}(t - T_{cj})} \right)$$

Подставив полученные выражения для $R_{aigj}(t)$ и $K_{YaiYj}(t)$ в (3.42), получаем:

$$K_{ZY}(t, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \frac{D_{Xij} T_s}{\alpha_{ij} T_{pi} - 1} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-E\left[\frac{T_{cj}}{T_s}\right]} \times$$

$$\times \left(\frac{2\alpha_{ij} T_{pi} e^{\left(\frac{E[t/T_s] T_s - t + T_{cj}}{T_{pi}}\right)/T_{pi}}}{\alpha_{ij} T_{pi} + 1 T_{fi} - (T_{fi} - T_s) e^{-T_s/T_{pi}}} - \frac{e^{\alpha_{ij} (E[t/T_s] T_s - t + T_{cj})}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s) e^{-\alpha_{ij} T_s}} \right) \quad (5.29)$$

Таким образом, дисперсия случайной функции ошибки обработки информации в ИИС равна:

$$D_E(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \frac{T_s \left(1 - T_s/T_{fi}\right)^{-E[T_{ci}/T_s]} \left(1 - T_s/T_{fj}\right)^{-E[T_{cj}/T_s]}}{\left(T_{fi} + T_{fj} - T_s\right) \left(T_{pi} + T_{pj}\right)}$$

$$\left(S_{ij} \left[\frac{T_{fj}}{T_{fj} - (T_{fj} - T_s) e^{-T_s/T_{pi}}} + \frac{(T_{fj} - T_s) e^{-T_s/T_{pi}}}{T_{fj} - (T_{fj} - T_s) e^{-T_s/T_{pi}}} \right] + D_{Xij} \left[\frac{2\alpha_{ij} T_{pi}^2}{(\alpha_{ij} T_{pi})^2 - 1} \times \right. \right.$$

$$\times \frac{T_{fj}}{T_{fj} - e^{-T_s/T_{pi}} (T_{fj} - T_s)} + \frac{2\alpha_{ij} T_{pj}^2}{(\alpha_{ij} T_{pj})^2 - 1} \frac{(T_{fj} - T_s) e^{-T_s/T_{pj}}}{T_{fj} - e^{-T_s/T_{pj}} (T_{fj} - T_s)} + \frac{2T_{pi}}{(\alpha_{ij} T_{pi})^2 - 1} \times$$

$$\left. \left. \times \frac{T_{fj}}{T_{fj} - e^{-\alpha_{ij} T_s} (T_{fj} - T_s)} + \frac{2T_{pj}}{(\alpha_{ij} T_{pj})^2 - 1} \frac{(T_{fj} - T_s) e^{-\alpha_{ij} T_s}}{T_{fj} - e^{-\alpha_{ij} T_s} (T_{fj} - T_s)} \right] \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j D_{Xij} -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j \frac{D_{Xij} T_s}{\alpha_{ij} T_{pi} - 1} \left(1 - \frac{T_s}{T_{fi}} \right)^{-E\left[\frac{T_{cj}}{T_s}\right]} \left(\frac{2\alpha_{ij} T_{pi} e^{\left(\frac{E[t/T_s] T_s - t + T_{cj}}{T_{pi}}\right)/T_{pi}}}{\alpha_{ij} T_{pi} + 1 T_{fi} - (T_{fi} - T_s) e^{-T_s/T_{pi}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{\alpha_{ij} (E[t/T_s] T_s - t + T_{cj})}}{T_{fi} - (T_{fi} - T_s) e^{-\alpha_{ij} T_s}} \right) \quad (5.30)$$

5.4. Исследование метрологических характеристик ИИС с мультипликативными связями между измерительными каналами

Полученные в предыдущих главах математические модели описывают процесс формирования погрешности обработки информации в ИИС с мультипликативными связями между измерительными каналами. Однако их использование для задач синтеза и анализа реальных ИИС невозможно без исследования адекватности моделей процессам, происходящим в реальных ИИС.

Еще одним этапом исследования свойств ИИС подобного рода должен стать анализ метрологических характеристик системы, который должен выявить зависимость относительной погрешности обработки информации в ИИС как от параметров ее структурных составляющих, так и от параметров внешних воздействий.

5.4.1. Структура имитационной модели

Имитационное моделирование как способ исследования объектов большой сложности основано на воспроизведении (имитации) с помощью программных или инструментальных средств развернутого во времени функционирования объекта с учетом связей с внешней средой. Экспериментальные исследования путем натуральных испытаний могут оказаться невозможными из-за больших затрат времени и средств. Особенно эффективно имитационное моделирование объектов, которые подвержены случайным внешним воздействиям, когда необходимы вероятностно-статистические исследования.

Создание имитационной модели включает в себя следующие этапы:

- разработка модели исследуемого объекта на основе частных моделей ее подсистем и связей между ними;
- выбор информационных характеристик исследуемого объекта;
- построение моделей воздействия внешней среды на исследуемый объект, т.е. построение частных имитационных моделей воздействующих факторов;
- выбор способов исследования имитационной модели.

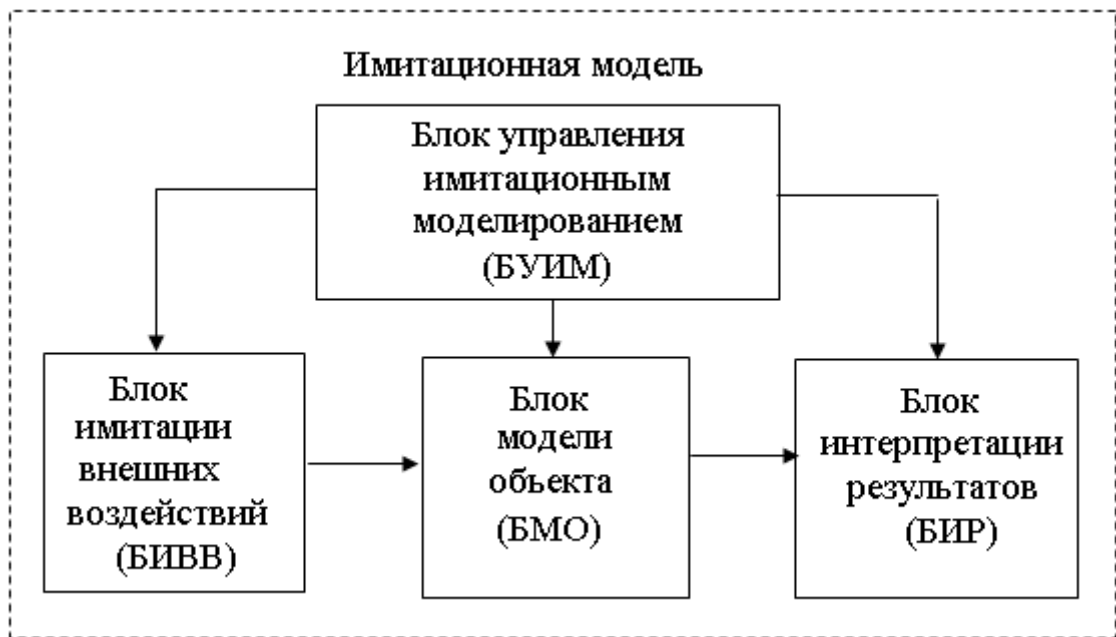


Рис.5.4. Структурная схема имитационной модели

Обобщенная схема имитационной модели приведена на рис.5.4. Каждый цикл имитационного моделирования включает в себя следующие этапы:

- формирование реализаций случайных процессов;
- обработка реализаций процессов в соответствии с алгоритмом функционирования модели объекта;
- обработка реализаций случайных процессов в заданных точках модели объекта с целью получения статистических оценок информативных параметров.

Интерпретация результатов моделирования заключается в вычислении интересующих характеристик объекта на основе полученных в процессе моделирования статистических оценок параметров. При этом погрешность моделирования будет стремиться к нулю при неограниченном увеличении цикла моделирования (в том случае, если статистические оценки параметров объекта являются состоятельными и несмещенными).

Таким образом, в процессе имитационного моделирования возникает противоречие между точностью результатов моделирования и временем моделирования. Основными

факторами, влияющими на соотношение точности и временных затрат на моделирование, является трудоемкость имитации внешних воздействий, реализации модели ИИС, получение оценок параметров ИИС. При этом замена эксперимента на реальном технологическом процессе машинным экспериментом ставит проблему проверки адекватности построенных моделей.

В качестве инструментальных средств, посредством которых осуществляется процесс моделирования, используются обычно либо специализированные аппаратные вычислительные средства, либо программные средства на персональной ЭВМ. Последний способ имеет ряд преимуществ, которые позволяют сделать выбор в его пользу: возможность создания обширных библиотек подпрограмм имитации различных подсистем и внешних воздействий, статистической обработки результатов моделирования, простота переконфигурирования моделей, практически не зависящая от сложности системы, гибкость управления ходом эксперимента, возможность реализации удобного интерфейса для представления результатов моделирования. При программной реализации имитационной модели имеется возможность создания языков высокого уровня для формализованного описания модели, что упрощает процесс синтеза модели и позволяет проводить эксперименты лицам, не имеющим специальной подготовки в области программирования.

На рис. 5.5 представлена структурная схема программной имитационной модели, использованной для исследования адекватности полученных в работе математических моделей. В ее основе лежит структура обобщенной имитационной модели, приведенная на рис. 5.4. Блок управления имитационным моделированием осуществляет контроль за ходом процесса моделирования. В его функции входит задание параметров для остальных блоков модели, визуализация результатов моделирования, организация диалога с оператором, организация, при необходимости, цикличности процесса моделирования с изменением параметров моделирующих алгоритмов.

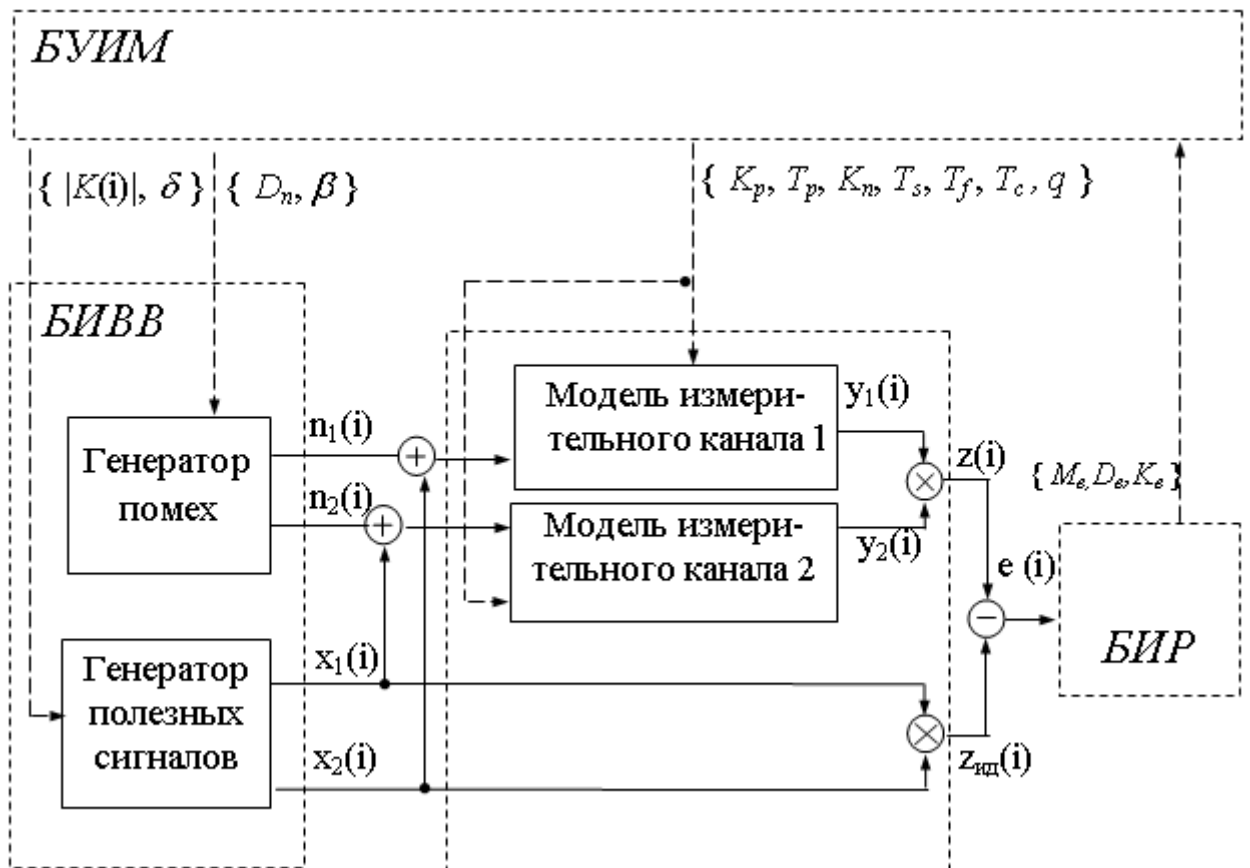


Рис. 5.5. Структурная схема программной имитационной модели двухканальной ИИС с мультипликативным взаимодействием каналов

Блок имитации внешних воздействий предназначен для генерации случайных процессов, которые в процессе моделирования будут использоваться в качестве полезных измерительных сигналов и воздействующих на них помех. Источниками случайных сигналов для генерации внешних воздействий на систему являются датчики случайных чисел. Однако для того, чтобы генерируемые БИВВ внешние воздействия обладали заданными параметрами, сигналы, формируемые датчиками случайных чисел, пропускают через формирующие фильтры. Для генерации помех измерения в БИВВ был использован формирующий фильтр, генерирующий случайный процесс с корреляционной функцией в виде экспоненты при заданных дисперсии D и скорости затухания α . Исходной информацией для моделирования служат вектора дисперсий и скоростей затухания корреляционных функций помех измерения в различных каналах.

Особенность генерации полезных сигналов заключается в том, что, согласно выбранной в работе модели сигналов, они являются случайными процессами с заданными авто- и взаимокорреляционными свойствами. Необходимость генерации зависимых друг от друга случайных процессов не позволяет использовать генератор помех для формирования полезных сигналов. Для моделирования полезных измерительных сигналов используется, как видно из схемы на рис. 5.5, другой генератор. В основу его работы положена гармоническая модель системы случайных стационарных процессов, алгоритм работы этого генератора подробно описан в главе 5.4.3. В качестве задающих параметров от БУИМ генератору полезных сигналов передаются матрица корреляционных функций генерируемых сигналов $|K(i)|$, а также требуемая точность генерации δ .

Блок модели измерительной системы имитирует ИИС. В состав БМО входят программные модели измерительных каналов ИИС. В ее состав входят программные модели структурных составляющих программно-аппаратного измерительного канала: первичного и нормирующего преобразователей (МПП и МНП), блока дискретизации (МБД), цифрового фильтра (МЦФ), алгоритма шкалы датчика (МШД), компенсатора динамических свойств объекта (МКДС), восстанавливающего элемента (МВЭ). Создание программной имитационной модели измерительного канала подробно обсуждалось в работе [8]. Необходимо также отметить, что БМИС моделирует работу линеаризованной ИИС (сигналы $y_1(i)$ и $y_2(i)$ на рис.5.5 складываются), что позволяет доказать адекватность полученных в предыдущих главах моделей, которые выводились с использованием процедуры линеаризации. Модель идеальной ИИС вычисляет истинное значение технико-экономического параметра при заданных входных воздействиях, после чего оно сравнивается со значением, полученным имитационной моделью реальной ИИС и выделяется погрешность измерений $e(i)$.

Блок интерпретации результатов осуществляет расчет оценок характеристик погрешности измерений: математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции:

$$\hat{m}_\varepsilon = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N e(i), \quad (5.31)$$

$$\hat{D}_\varepsilon = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (e(i) - \hat{m}_\varepsilon)^2, \quad (5.32)$$

$$\hat{K}_\varepsilon(k) = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=1}^{N-k} (e(i) - \hat{m}_\varepsilon)(e(i+k) - \hat{m}_\varepsilon). \quad (5.33)$$

5.4.2. Гармоническая модель измеряемых сигналов

Одним из этапов имитационного моделирования является, как уже отмечалось, построение моделей воздействия внешней среды на исследуемый объект, то есть построение частных имитационных моделей воздействующих факторов. Применительно к реализуемой модели, на этом этапе имитационного моделирования встает проблема генерации случайных процессов, которые будут в условиях машинного эксперимента воспроизводить реально воздействующие на ИИС внешние факторы – измеряемые сигналы, помехи. При этом сложность ИИС и контролируемых технологических процессов приводят к тому, что генерировать необходимо систему случайных процессов, которые, согласно принятой ранее модели измеряемых сигналов, должны быть стационарными и обладать заданными характеристиками – математическими ожиданиями, взаимно- и автокорреляционными функциями.

К настоящему времени разработано несколько методов генерации стационарных случайных процессов (ССП) : метод канонического разложения, фильтрации “белого шума”, вероятностные методы. Метод канонического разложения, предложенный В.С. Пугачевым, предполагает представление случайной функции в виде:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N V_n q_n(t), \quad (5.34)$$

где V_n – некоторая случайная величина, распределенная по нормальному закону, $q_n(t)$ - некоторая детерминированная функция, называемая базисной.

Этот же подход можно распространить на случай систем случайных стационарных процессов (СССП) [34], используя в качестве модели каноническую модель ССП вида

$$y_g(t) = \sum_{i=1}^g \sum_{k=0}^{n-1} a_{gi,k} X_{ik} \cos(\omega_k t - \Phi_{ik} + \Phi_{gi,k}), \quad (5.35)$$

где $a_{gi,k}$ и $\Phi_{gi,k}$ - некоторые неслучайные величины, обеспечивающие заданные свойства ССП, X_{ik} и Φ_{ik} -независимые случайные величины, которые имеют следующие характеристики:

$$M[X_{jk}] = M[X_{ik}X_{jk}] = M[X_{ik}\Phi_{ik}] = M[X_{ik}\Phi_{jk}] = M[\Phi_{ik}\Phi_{jk}] = 0; \quad (5.36)$$

$$M[X_{ik}^2] = 1$$

Случайные величины Φ_{ik} имеют равномерную функцию распределения на интервале $[0, 2\pi]$, а случайные величины X_{ik} распределены нормально.

5.4.3. Метод моделирования измеряемых сигналов на основе гармонического разложения

Исходными данными для моделирования внешних воздействий на ИИС $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)$ является корреляционная матрица:

$$\|K(\tau)\| = \begin{vmatrix} K_{11}(\tau) & K_{12}(\tau) & \dots & K_{1N}(\tau) \\ K_{21}(\tau) & K_{22}(\tau) & \dots & K_{2N}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1}(\tau) & K_{N2}(\tau) & \dots & K_{NN}(\tau) \end{vmatrix}. \quad (5.37)$$

где $K_{ii}(\tau)$ – АКФ ССП $Y_i(t)$, $K_{ji}(\tau)$ – ВКФ ССП $Y_i(t)$ и $Y_j(t)$.

Из свойств ССП следует, что

$$K_{gj}(\tau) = K_{jg}(-\tau), \quad (5.38)$$

что позволяет для моделирования использовать треугольную матрицу вместо матрицы (5.37).

В качестве модели случайного стационарного процесса $Y_g(t)$ будем использовать модель (5.35). На подготовительном этапе моделирования необходимо получить выражения для постоянных коэффициентов $a_{gi,k}$ и фазы $\Phi_{gi,k}$, а также определить количество суммируемых гармоник n_j . Как показано в [34], выражения для коэффициентов имеют следующий вид

$$a_{gg,k} = \begin{cases} \sqrt{2c_{gg,k} - \sum_{i=1}^{g-1} a_{2i,k}^2}, & k \leq n_{g-1}; \\ \sqrt{2c_{gg,k}}, & k > n_{g-1}; \end{cases} \quad (5.39)$$

$$a_{gl,k} = \begin{cases} \frac{2A_{gl,k} + \sum_{i=1}^{l-1} a_{gi,k} a_{li,k} \cos(\Phi_{li,k} - \Phi_{gi,k})}{a_{ll,k} \cos \Phi_{gl,k}}, & k \leq n_l; \\ \frac{2C_{gl,k}}{a_{ll,k}}, & k > n_l; \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\Phi_{gl,k} = \begin{cases} \arctg \frac{B_{gl,k} + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{a_{gi,k} a_{li,k}}{2} \sin(\Phi_{li,k} - \Phi_{gi,k})}{A_{gl,k} - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{a_{gi,k} a_{li,k}}{2} \cos(\Phi_{li,k} - \Phi_{gi,k})} & k \leq n_l; \\ \Phi_{gl,k}^* & k > n_l, \end{cases} \quad (5.41)$$

Коэффициенты $c_{ii,k}$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье АКФ i -го случайного процесса:

$$K_{ii}(\tau) = \sum_{k=0}^{n_i-1} c_{ii,k} \cos w_k \tau.$$

Коэффициенты $A_{gl,k}$, $B_{gl,k}$, используемые в (5.39)-(5.41), можно получить, разложив ВКФ моделируемых случайных процессов в ряд Фурье на интервале $[-\tau_m, \tau_m]$, где τ_m определяется из погрешности усечения ε :

$$K_g(\tau_m) \leq \varepsilon.$$

Для ВКФ двух процессов $Y_g(t)$ и $Y_l(t)$ τ_m находим из условия

$$\tau_{mgl} = \max(\tau_{mg}, \tau_{ml}).$$

Тогда коэффициенты ряда Фурье будут вычисляться следующим образом:

$$A_{gl,0} = \frac{1}{2\tau_{mgl}} \int_{-\tau_{mgl}}^{\tau_{mgl}} K_{gl}(\tau) d\tau \quad (5.42)$$

$$A_{gl,k} = \frac{1}{\tau_{mgl}} \int_{-\tau_{mgl}}^{\tau_{mgl}} K_{gl}(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2\tau_{mgl}}\tau\right) d\tau \quad (5.43)$$

$$B_{gl,k} = \frac{1}{\tau_{mgl}} \int_{-\tau_{mgl}}^{\tau_{mgl}} K_{gl}(\tau) \sin\left(\frac{\pi}{2\tau_{mgl}}\tau\right) d\tau \quad (5.44)$$

При необходимости полностью автоматизировать процесс моделирования СССП, а также при моделировании СССП, заданной таблично, а не аналитически, можно воспользоваться формулами дискретного преобразования Фурье:

$$A_{gl,0} = \frac{1}{2M} \sum_{i=-M}^M K_{gl}(i\Delta t); \quad (5.45)$$

$$A_{gl,k} = \frac{1}{M} \sum_{i=-M}^M K_{gl}(i\Delta t) \cos\left(\frac{\pi}{M}ik\right); \quad (5.46)$$

$$B_{gl,k} = \frac{1}{M} \sum_{i=-M}^M K_{gl}(i\Delta t) \sin\left(\frac{\pi}{M}ik\right), \quad (5.47)$$

где $M = \frac{\tau_{mgl}}{\Delta\tau}$

Таким образом, используя формулы (5.39)-(5.41) совместно с (5.42)-(5.44), можно автоматизировать процесс моделирования СССП, заданной аналитически, а с (5.45)-(5.47) – заданной таблично.

Коэффициенты $C_{gl,k}$ и $\Phi_{gl,k}^*$ в (5.41), (5.40) равны:

$$C_{gl,k} = \sqrt{A_{gl,k}^2 + B_{gl,k}^2}, \quad \Phi_{gl,k}^* = \arctg \frac{B_{gl,k}}{A_{gl,k}}.$$

5.4.4. Проверка адекватности математических моделей

Задачей имитационного эксперимента является доказательство адекватности полученных в предыдущих главах математических моделей.

Получив в БИР параметры погрешности обработки измерительной информации по результатам имитационного моделирования, необходимо сопоставить параметры реакции имитационной модели и результаты расчета по математической модели при одних и тех же параметрах входных воздействий. Степень адекватности математической модели реальному объекту (который в рамках имитационного эксперимента заменяется программной имитационной моделью) можно оценить численно. Как указано в [35] математическая модель может быть признана адекватной реальному объекту, если нулевая гипотеза H_0 о совпадении параметров выборки с выхода имитационной модели параметрам, полученным по математической модели не отвергается с уровнем значимости риска $q=5\div 10$ %. Для оценки подобного соответствия могут использоваться различные критерии: χ^2 , Вилконсона, Колмогорова-Смирнова, однако для нормально распределенных выборок наиболее подходящими являются критерии t (Стьюдента) и F (Фишера).

Критерий Фишера используется для оценок различия между дисперсиями двух выборок:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{\text{ММ}}^2}{\hat{\sigma}_{\text{ИМ}}^2},$$

где $\hat{\sigma}_{\text{ММ}}^2$ - оценка дисперсия функции ошибки, полученная по математической модели, $\hat{\sigma}_{\text{ИМ}}^2$ - оценка дисперсия функции ошибки, полученная по имитационной модели.

Значение критерия F сравнивается с табличным для принятого уровня риска q и числе степеней свободы, определяемом количеством проведенных опытов. Гипотеза принимается, если значение критерия меньше табличного и отвергается в противном случае.

Критерий t используется для оценки различия математического ожидания двух выборок:

$$t = \frac{\hat{m}_{\text{ММ}} - \hat{m}_{\text{ИМ}}}{\hat{\sigma}_d},$$

где $\hat{m}_{\text{ММ}}$ - оценка математического ожидания функции ошибки, полученная по математической модели, $\hat{m}_{\text{ИМ}}$ - оценка математического ожидания функции ошибки, полученная по имитационной модели, $\hat{\sigma}_d$ - стандартная ошибка разности между средними.

Далее вычисленное значение сравнивают с табличным $t_{q,v}$ для распределения Стьюдента, где q – уровень значимости риска, v – количество степеней свободы, зависящее от количества проведенных опытов. Гипотеза принимается, если значение критерия меньше табличного и отвергается в противном случае.

Результаты экспериментов на имитационной модели доказали адекватность математических моделей, поскольку различие параметров погрешности обработки информации, полученных в ходе имитационного моделирования ИИС и по математическим моделям можно считать несущественными по критериям F и t с уровнем значимости риска $q=5\%$

5.5. Исследование метрологических характеристик информационно-измерительных систем с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов

Решение задачи параметрического синтеза предполагает, как уже отмечалось, выбор оптимальных параметров структурных составляющих ИИС. В связи с этим необходимо исследовать характер зависимости

относительной среднеквадратичной погрешности от этих параметров, а в особенности от периода опроса датчиков и постоянных времени цифровых фильтров. Анализ полученных в главе 5.2 математических моделей показал, что не существует оптимального периода опроса датчиков в ИИС, если за оптимальное принимать то значение T_s , при котором погрешность обработки информации минимальна (рис. 5.6).

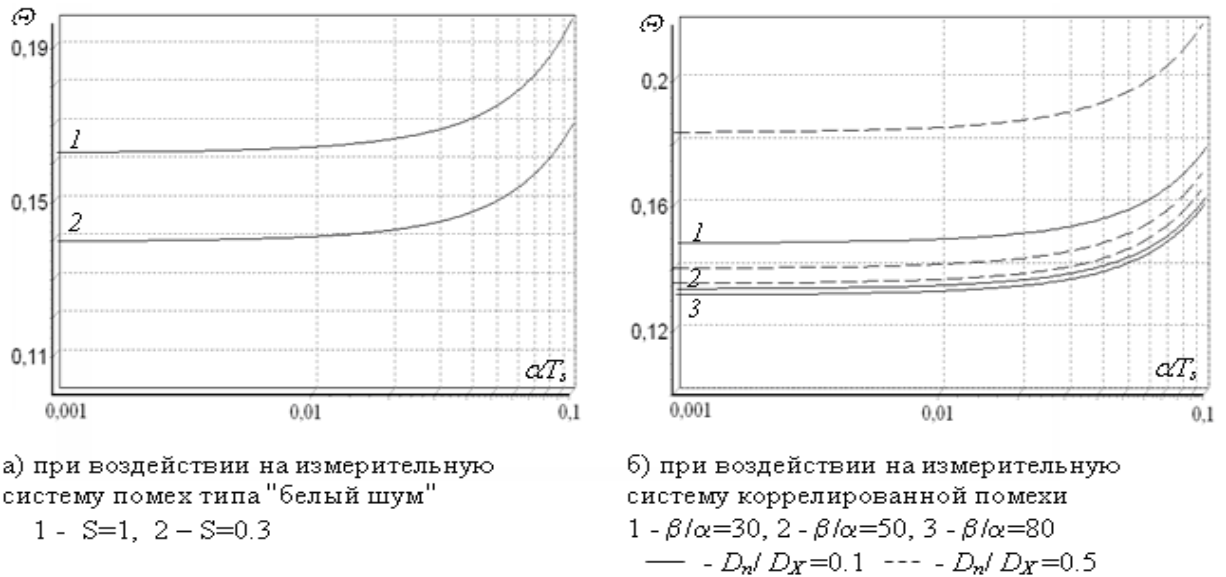
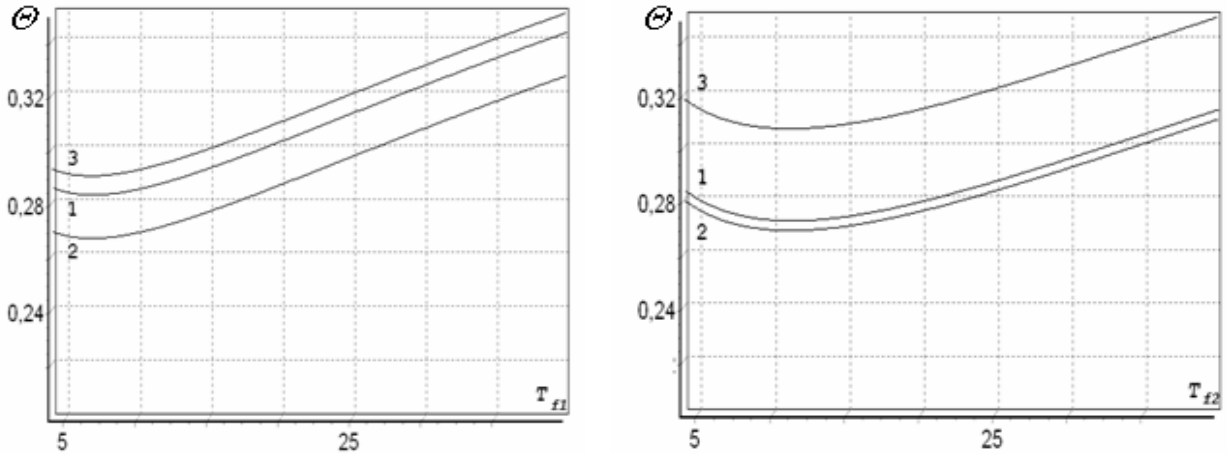


Рис.5.6. Зависимость относительной погрешности обработки информации от периода опроса первичных преобразователей

С уменьшением периода опроса уменьшается относительная погрешность обработки информации Θ , однако, начиная с некоторого значения, изменение T_s не приводит к существенному улучшению метрологических характеристик ИИС. Именно это значение можно принять за оптимальное значение периода опроса датчика T_s , так как, обеспечивая обработку информации с погрешностью, близкой к минимальной, его использование позволяет уменьшить нагрузку на информационную подсистему ИИС.

Можно отметить, что чем более высокочастотной по отношению к измеряемому сигналу является помеха при одних и тех же параметрах цифровых фильтров (см. рис.5.6б), тем меньше погрешность измерений. Это объясняется тем, что фильтры при низкочастотной помехе вырезают не все

ее гармоники. При этом каждый из каналов ИИС можно настроить на оптимальную фильтрацию помех, что видно из рис. 5.7, где минимум погрешности достигается при различных значениях постоянной времени цифровых фильтров в различных измерительных каналах (исследовалась двухканальная ИИС).



а) зависимость погрешности от постоянной времени фильтра первого канала
 1- $T_{f2}=3$, 2 - $T_{f2}=10$, $T_{f2}=20$

а) зависимость погрешности от постоянной времени фильтра второго канала
 1- $T_{f1}=3$, 2 - $T_{f1}=10$, $T_{f1}=20$

Рис.5.7. Зависимость относительной погрешности обработки информации от параметров цифровых фильтров. Параметры помехи:

$$\beta_1/\alpha_1=10, D_{n1}/D_{x1}=0,3, \beta_2/\alpha_2=50, D_{n2}/D_{x2}=0,3$$

Использование в цепочке преобразований измерительной информации в ИИС операции восстановления привело к нестационарности выходного сигнала системы – в математической модели это отражается наличием параметра τ . Этот параметр отражает неопределенность значения технико-экономического параметра в промежутках между замерами.

На рис.5.8 представлены графики зависимости погрешности обработки информации от τ , этот параметр может принимать значения в диапазоне $[0, T_s]$. Из рисунка очевидно монотонное увеличение значения погрешности при увеличении τ , что объясняется увеличением неопределенности значения параметра по мере временного удаления от очередного измерения. При этом, чем больше период опроса датчиков T_s , а, соответственно, больше абсолютные, выраженные в единицах времени, а не в долях, значения τ , тем более неопределенным становится значение параметра, что выражается в увеличении погрешности (см. соотношение графиков, изображенных сплошными и

штриховыми линиями на рис. 5.8).

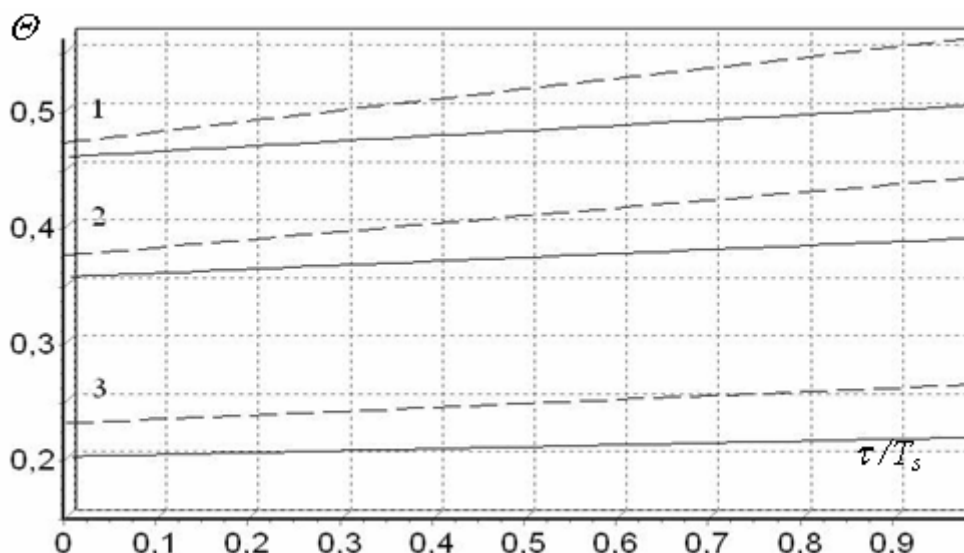


Рис.5.8. Зависимость относительной погрешности обработки информации от τ .
 $1 - \alpha = 0,08$, $1 - \alpha = 0,05$, $1 - \alpha = 0,02$, $T_s = 0,5$, $T_s = 1$

5.6. Выводы главы

В пятой главе были получены ряд выражений для относительной погрешности динамических измерений в типовой ИИС с мультипликативным взаимодействием каналов. Раскрыта внутренняя структура аналоговой и цифровой части ИИС, где выделены наиболее часто встречающиеся в реальных системах контроля и управления функциональные звенья. Для выбранных звеньев были выбраны математические модели, описывающие осуществляемые ими преобразования. Были получены математические модели информационно-измерительной системы с мультипликативным взаимодействием измерительных каналов - выражения (5.13) и (5.14). На основе математических моделей, рассмотренных в главе 3, были получены математические модели погрешности измерений, которые являются функциями параметров структурных компонент ИИС и параметров измеряемых сигналов. Выражение (5.19) может быть использовано для количественной оценки погрешности в условиях воздействия на измеряемые сигналы помехи типа “белый шум”, то есть когда не удается точно идентифицировать источник помехи и ее основные свойства. Таким образом,

это выражение является верхней оценкой погрешности обработки информации в ИИС. В том случае, когда на измеряемые сигналы воздействует помеха, которую можно описать как случайный процесс с корреляционной функцией в виде экспоненты, математическая модель погрешности описывается выражением (5.23). Еще одна математическая модель – выражение (5.29) – предусматривает наличие зависимости между измеряемыми различными каналами системы сигналами и является функцией параметров взаимокорреляционных функций непосредственно измеряемых сигналов. Важной особенностью полученных выражений для относительной погрешности обработки информации является ее зависимость от времени, а точнее от момента времени τ в промежутке между опросами датчика, для которого получено значение технико-экономического показателя. Следовательно, функция ошибки обработки информации в ИИС является нестационарной по корреляционной функции.

Методом имитационного моделирования на ЭВМ была доказана адекватность полученных в предыдущих главах математических моделей реальным информационно-измерительным системам. При этом особое внимание было уделено моделированию внешних по отношению к ИИС воздействий - полезных сигналов и помех. Для генерации измеряемых сигналов был использован гармонический метод моделирования систем случайных стационарных систем.

Исследование математических моделей позволило выявить следующие особенности ИИС:

1. Не существует оптимального значения периода опроса датчика в системе (точнее, это значение равно 0). Однако, в области малых T_s погрешность обработки информации практически не зависит от уменьшения периода опроса, в связи с чем оптимальным периодом опроса датчика в ИИС является такое его значение, которое при обеспечении погрешности измерений, близкой к минимальной, позволяет разгрузить вычислительные мощности ИИС.

2. В связи с тем, что каждый канал ИИС испытывает воздействие собственных помех, существуют оптимальные параметры для каждого из цифровых фильтров, входящих в структуру измерительных каналов системы.

Глава 6

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИИК БЕСКОНТАКТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ДИАМЕТРА РЕЗИНОТЕХНИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ

Резиновые уплотнительные кольца и манжеты (далее называемые «объекты измерения» или просто «объекты»), изготавливаемые в резинотехнической промышленности, обладают такими топологическими и физико-химическими свойствами, которые накладывают специфические требования на методы и технические средства измерения их геометрических параметров.

Анализ методов и технических средств измерения внутреннего диаметра резиновых уплотнительных колец и манжет показал, что каждое из применяемых измерительных устройств имеет недостатки в разной степени влияющие на эффективность этих устройств. Предлагается метод, учитывающий характерного свойства колец и манжет – отклонения их формы от правильной формы окружности. При анализе измерительных средств выяснилось, что фактор малой жесткости объектов измерения можно практически полностью устранить при использовании специальных бесконтактных способов измерения.

Разработан информационно-измерительный канал, по структуре относящийся к телевизионным измерительным системам (ТВИС). Отличительной особенностью таких систем является наличие оптического сигнала, получаемого телевизионным датчиком, а также обработка этого же сигнала различными методами.

Структура информационно-измерительного канала, реализующего предлагаемый метод измерения, показана на рис.6.1. Входной сигнал поступает на формирователь изображения (теледатчик), который передает видеосигнал к компьютеру. Компьютер содержит специальный АЦП для перевода изображения в двоичный код. Изображение измеряемого объекта

полностью обрабатывается программным обеспечением с целью получения оператором результата измерения внутреннего диаметра.

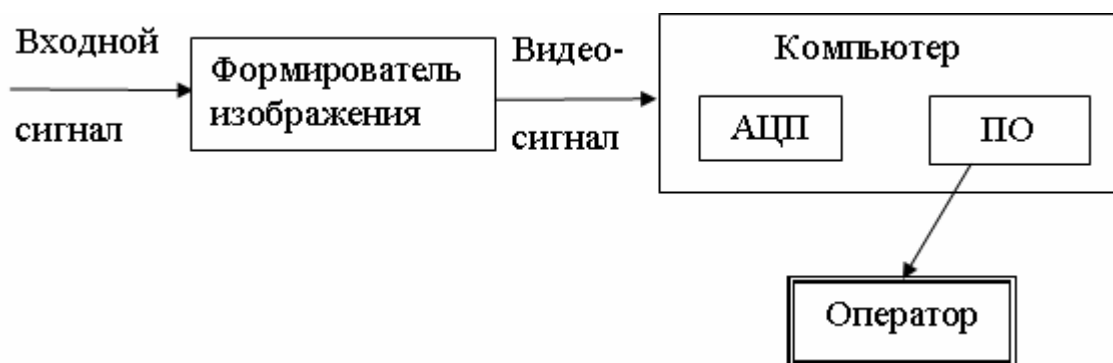


Рис.6.1. Структура ТВИС

Для исследования метрологических характеристик ИИК бесконтактного измерения внутреннего диаметра резиновых уплотнительных колец создана экспериментальная установка.

При создании установки учитывались условия:

1. Надежность работы установки, которая может быть обеспечена простой структурой.
2. Простота эксплуатации.
3. Относительно невысокая стоимость.
4. Возможность автоматизировать измерительный процесс.

Внешний вид экспериментальной установки показан на рис 6.2. На столе 3 расположен компьютер 4, объект измерения 5 и штатив 2, на котором с помощью приспособления крепится телекамера 1. Приспособление вместе с телекамерой может перемещаться по вертикали в обоих направлениях для того, чтобы в поле зрения помещались кольца любых типоразмеров. Структурная схема информационно-измерительного канала обработки информации изображена на рис. 6.3.

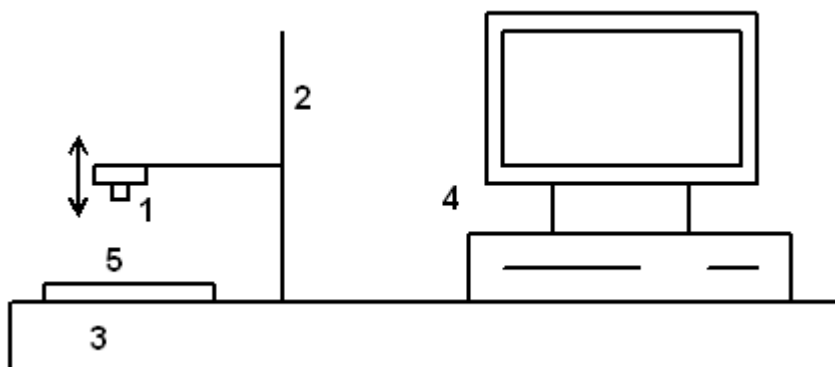


Рис. 6.2. Функциональная схема установки

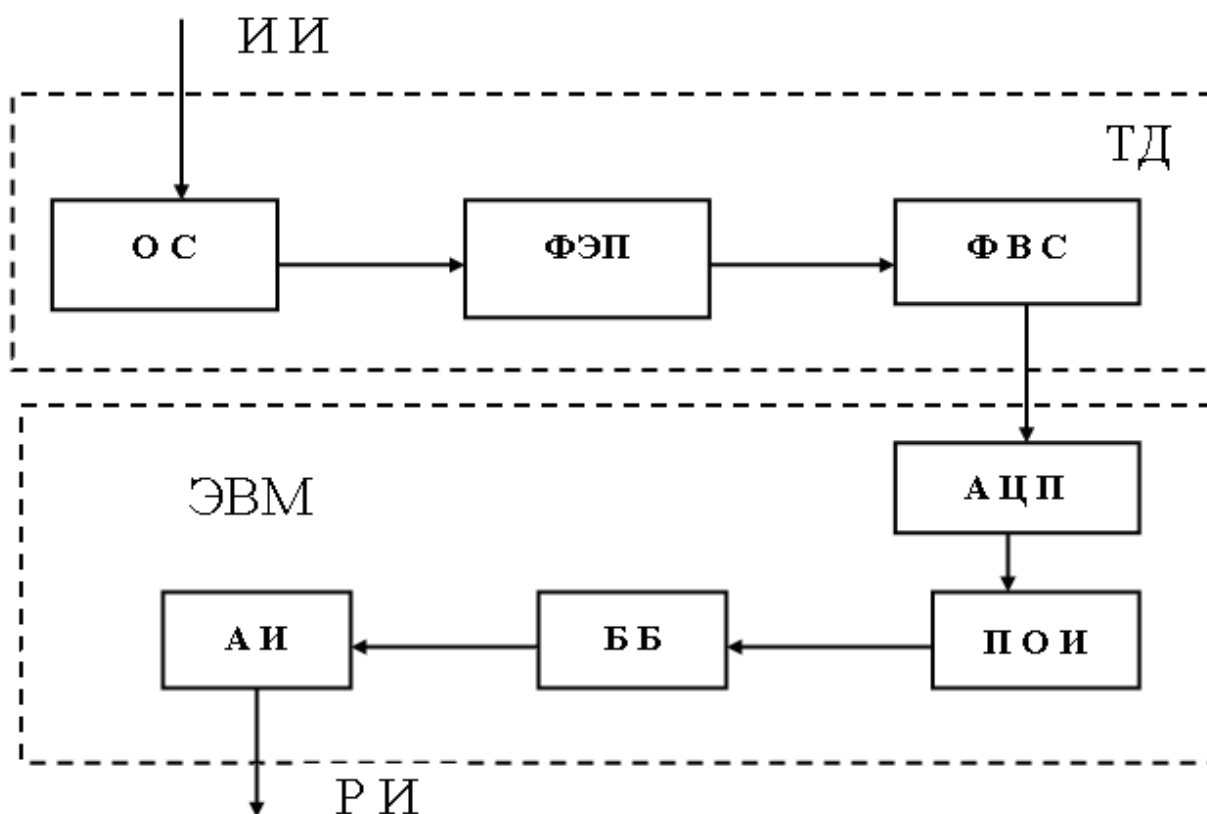


Рис.6.3. Структурная схема информационно-измерительного канала

Изображение кольца поступает на теледатчик ТД. Теледатчик состоит из трех основных узлов:

1. Оптическая система ОС, выполненная в виде одно- или двухлинзового объектива. ОС предназначена для проецирования изображения измеряемого объекта на фотоэлектрический преобразователь.

2. Фотоэлектрический преобразователь (ФЭП) представляет собой полупроводниковый прибор с зарядовой связью (ПЗС), далее называемый ПЗС- матрицей. ФЭП предназначен для преобразования световой энергии в электрический сигнал, который обрабатывается формирователями видеосигнала, встроенным в телекамеру.

3. Формирователь видеосигнала (ФВС) - это электронная схема, которая преобразует электрический сигнал ФЭП в стандартный телевизионный сигнал.

Входное изображение ИИ последовательно проходит через эти три узла теледатчика и на выходе ТД представляет собой аналоговый электрический сигнал сложной формы.

Этот сигнал поступает на аналого-цифровой преобразователь АЦП. В АЦП непрерывное изображение подвергается двум типам преобразований:

1. Пространственная дискретизация – получение дискретных отсчетов аргументов функции яркости $S(i * \Delta x, j * \Delta y)$, где $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$ – номера отсчетов по горизонтали и по вертикали; n и m – максимальный размер изображения; Δx и Δy –шаги дискретизации по двум направлениям.

2. Квантование по уровню - преобразование области значений функции яркости $S(x,y)$ к конечному множеству уровней (квантов):

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}, \text{ где } k - \text{ количество уровней яркости.}$$

На выходе АЦП формируется цифровой сигнал или цифровое изображение, взятое в один момент времени. Квантованные значения яркости цифрового изображения хранятся в видеопамяти компьютера в виде матрицы $m * n$.

Предварительная обработка изображения ПОИ представляет собой обеспечение, включающее в себя цифровые фильтры. Цифровая фильтрация изображения предназначена для подавления шумов, уменьшения искажений, вызванных влиянием внешних факторов (освещение, вибрирование, запыленность), оптической системы, усиления контуров объекта, увеличения

контрастности и т.д. В состав ПОИ могут входить различные фильтры в зависимости от условий измерений.

Бинаризация (пороговое ограничение) Б также представляет собой программное обеспечение и предназначена для удаления с изображения избыточной информации. На вход этого блока поступает цифровое изображение с K градациями серого цвета, однако для измерения диаметра достаточно лишь два цвета – объекта и фона. В общем виде бинаризация осуществляется как ограничение динамического диапазона функции яркости $S(x,y)$:

$$S\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } S(x,y) \geq S_n, \\ 0, & \text{если } S(x,y) < S_n, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $S\delta(x,y)$ – изображение после бинаризации, S_n – значение порога яркости.

Алгоритм измерения АИ осуществляет преобразования и получает результат измерения РИ – внутренний диаметр кольца, выраженный в миллиметрах.

Экспериментальные исследования состоят из следующих этапов:

1. Расчет метрологических характеристик ИИК измерения внутреннего диаметра резиновых уплотнительных колец и манжет.
2. Получение зависимости общей погрешности от параметров дискретизации.
3. Исследование влияния цифровых методов обработки изображения на точность измерений.
4. Исследование ошибки, возникающей в результате выполнения бинаризации изображения.
5. Проверка математической модели погрешности измерения на адекватность. Получение зависимости общей погрешности от параметров алгоритма измерения.

6.1 Метрологические характеристики ИИК

Суммарная погрешность измерения включает случайные и систематические составляющие. Поскольку значение систематических погрешностей заранее неизвестно, то очевидно, что общую погрешность метода измерения можно считать случайной величиной. Предполагается, что погрешность имеет нормальное распределение.

Нахождение метрологических характеристик с помощью экспериментальных исследований предполагает применение методов математической статистики. В качестве метрологических характеристик приведенной погрешности можно использовать точечные или интервальные оценки: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. За показатель, характеризующий точность измерений выбрано среднеквадратическое отклонение приведенной погрешности.

При проведении экспериментов выполняется конечное, небольшое число измерений объекта; следовательно, точечные оценки могут давать не совсем верные результаты. Поэтому для среднего квадратического отклонения используется интервальная оценка, что позволяет утверждать о более надежных результатах эксперимента. Для математического ожидания и дисперсии используются точечные оценки.

Для нахождения метрологических параметров приведенной погрешности проводилось n измерений объектов одного типоразмера с заранее известными истинными значениями внутреннего диаметра $d_{ист}$ (вернее известны значения, которые с достаточной точностью можно принять за истинные или эталонные). По найденным результатам измерений $d_{изм}$ находилась приведенная погрешность δ_n .

6.2 Расчет математического ожидания приведенной погрешности

В математической статистике доказано [19], что для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака x)

(6.2)

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n,$$

где x – количественный признак; x_1, x_2, \dots, x_n – значения количественного признака, полученные в результате n независимых наблюдений, которые рассматриваются как независимые случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n .

Таким образом, математическое ожидание приведенной погрешности в эксперименте находится как среднее арифметическое значений полученной приведенной погрешности

(6.3)

$$M(\delta_n) = (\delta_{n1} + \delta_{n2} + \dots + \delta_{nn}) / n,$$

где n – количество независимых измерений внутреннего диаметра объектов.

6.2.1 Математическое ожидание приведенной погрешности для объектов одного типоразмера

При измерении манжет ($n=20$) одного типоразмера с диаметром $d=42$ мм найдено математическое ожидание приведенной погрешности измерения. Полученные данные приведены в таблице 6.1. Полученное значение математического ожидания $M(\delta_n) = 25,83 \%$.

Таблица 6.1

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним диаметром 42 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{п, \%}$	25,50	25,7	26,1	25,3	26,2	25,9	25,8	25,9	25,9	26

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_{п, \%}$	25,4	25,6	25,9	25,5	25,8	25,9	26,1	25,9	26,1	26

6.2.2 Математическое ожидание приведенной погрешности для объектов разного типоразмера

Проведены измерения для объектов пяти типоразмеров. Для манжет с внутренним диаметром $d=14,5$ мм полученные значения приведенной погрешности отображены в табл. 6.2, диаметром 42, 70, 100 и 140 соответственно в таблицах 6.3, 6.4, 6.5 и 6.6.

Таблица 6.2

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним диаметром 14,5 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{п, \%}$	20,1	19,6	19,9	21,2	20	20,4	19,8	21,3	20,9	19,4

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_{п, \%}$	19,7	19,7	20,2	20,3	21,1	20,6	19,9	20	20,1	20

Таблица 6.3

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним
диаметром 42 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{п, \%}$	25,50	25,7	26,1	25,3	26,2	25,9	25,8	25,9	25,9	26

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_{п, \%}$	25,4	25,6	25,9	25,5	25,8	25,9	26,1	25,9	26,1	26

Таблица 6.4

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним
диаметром 70 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{п, \%}$	35,6	34,8	34,7	35	35,2	35,2	35,1	35	34,5	35,2

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_{п, \%}$	34,8	35,5	34,9	35,3	35	35,1	35,5	34,7	34,8	34,8

Таблица 6.5

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним
диаметром 100 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_{п, \%}$	44,2	44	43,9	43,8	43,7	44,4	44,1	43,8	43,8	44,1

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_{п, \%}$	44,7	44,1	43,6	43,5	44,4	44	43,5	44,6	44,2	44,2

Таблица 6.6

Значения приведенной погрешности для объектов с внутренним диаметром 140 мм.

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta_n, \%$	53,4	53,6	52,8	53,6	52,8	52,6	53,3	53,1	54,6	54,4

№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\delta_n, \%$	52,9	52,9	52,8	53,4	53,3	52,6	53,6	53,3	52,8	52,9

Результаты измерений объектов разных типоразмеров показаны на рис. 6. 4.

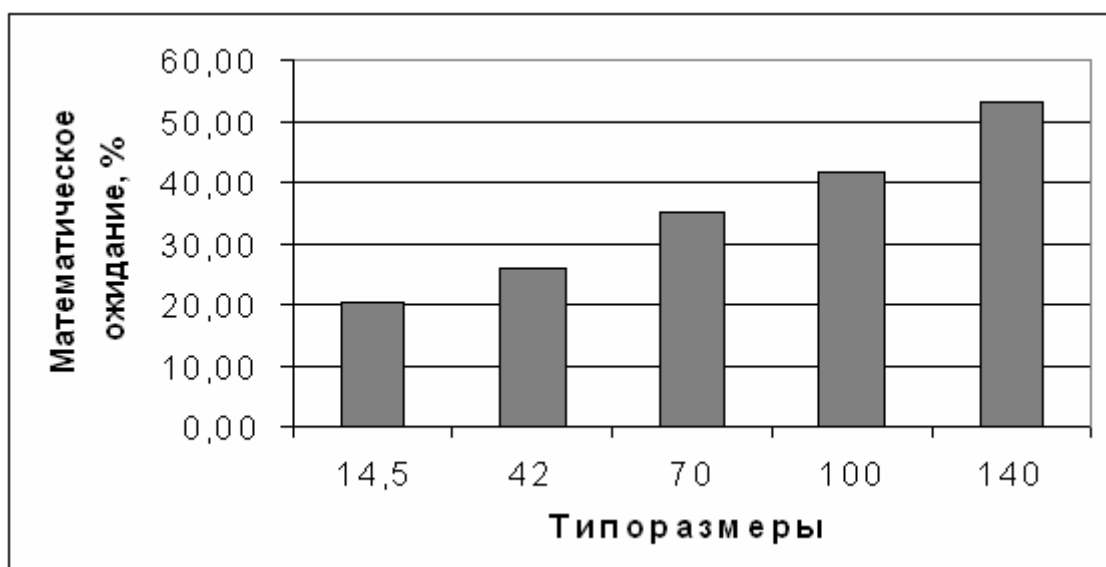


Рис.6.4. Математическое ожидание $M(\delta_n)$ для объектов разных типоразмеров

Полученные результаты свидетельствуют о том, что погрешность измерения зависит от значения внутреннего диаметра. Рост погрешности при увеличении внутреннего диаметра вызван искажениями, связанными с дискретизацией внутреннего контура объекта. В цифровом виде контур имеет ступенчатый вид. Такой ступенчатый контур заменяет

действительный, более гладкий, что приводит к ошибке (завышенный результат измерения). При одинаковом разрешении изображения ошибка будет тем больше, чем больше длина внутреннего контура, а следовательно диаметра объекта.

6.3 Расчет дисперсии и среднего квадратического отклонения приведенной погрешности

В математической статистике в качестве оценки дисперсии принимается исправленная дисперсия

$$s_{\delta_n}^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i (\delta_{ni} - M(\delta_n))^2 \right) / (n - 1) \quad (6.4)$$

Для $n=20$ и типоразмера с диаметром 42 мм получена исправленная дисперсия $s^2=1,5 \cdot 10^{-4}$. Очевидно, что при таком значении дисперсии оценка математического ожидания является эффективной.

Для оценки среднего квадратического отклонения используется “исправленное” среднее квадратическое отклонение

$$s_{\delta_n} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k n_i (\delta_{ni} - M(\delta_n))^2 \right) / (n - 1)} \quad (6.5)$$

Для $n=20$ и типоразмера с диаметром 42 мм получено “исправленное” среднее квадратическое отклонение $s_{\delta_n}=1,2 \cdot 10^{-2}$.

Для получения более точных и надежных результатов найдена интервальная оценка среднего квадратического отклонения σ_{δ_n} в виде

$$s_{\delta_n} (1 - q) < \sigma_{\delta_n} < s_{\delta_n} (1 + q), \quad (6.6)$$

где q – параметр, зависящий от заданной надежности γ и количества измерений n . Найден доверительный интервал, покрывающий среднее

квадратическое отклонение с надежностью $\gamma=0,95$ (по измерениям 40 объектов разного типоразмера):

$$0,091 < \sigma_{\delta_n} < 0,149. \quad (6.7)$$

6.4 Ошибка дискретизации

Ошибка дискретизации вызвана двумя основными факторами:

1. Конечным числом отсчетов оцифрованного изображения объекта измерения.
2. Искажениями, возникающими в результате различного числа отсчетов по горизонтали N и по вертикали M .

Измерения внутреннего диаметра 20 объектов (типоразмер с $d=100$ мм) при изменении количества отсчетов дают оценку математического ожидания среднего квадратического отклонения приведенной погрешности, показанного в табл. 7.

Таблица 6.7

Значения $M(\delta_n)$, % при изменении числа отсчетов.

M \ N	N						
	160	176	320	352	640	720	800
120	91	83	70,5	63,2	57,7	55,5	54,2
190	85,2	72,8	62,8	60,8	56,5	53,5	51,8
240	78,2	71,2	58,7	57,3	54	53	50,3
350	73,3	68,8	58,2	54,2	52,8	49,8	48,2
480	69,8	64,3	55,3	52,5	51,7	48,3	45,8
520	66,8	61,2	53,7	50,7	48,8	47,3	44,2
600	64,5	59,7	52,5	48,2	46,3	44,2	43,2

Очевидно, что рассматриваемая составляющая ошибки уменьшается при увеличении количества отсчетов (рис. 6.5).

При тех же условиях измерений получена зависимость $M(\delta_n)$ от соотношения N/M . Результаты приведены в табл.6.8 и на рис.6.6.

Таблица 6.8

Значения $M(\delta_n)$ при изменении соотношения N и M .

N	160	176	320	352	640	640	640	640	640	640	640
M	600	600	600	600	600	520	480	350	240	190	120
N/M	0,27	0,29	0,53	0,59	1,07	1,23	1,33	1,83	2,67	3,37	5,33
$M(\delta_n)$	64	60,00	53	48	46	49	52	53	54	57	58

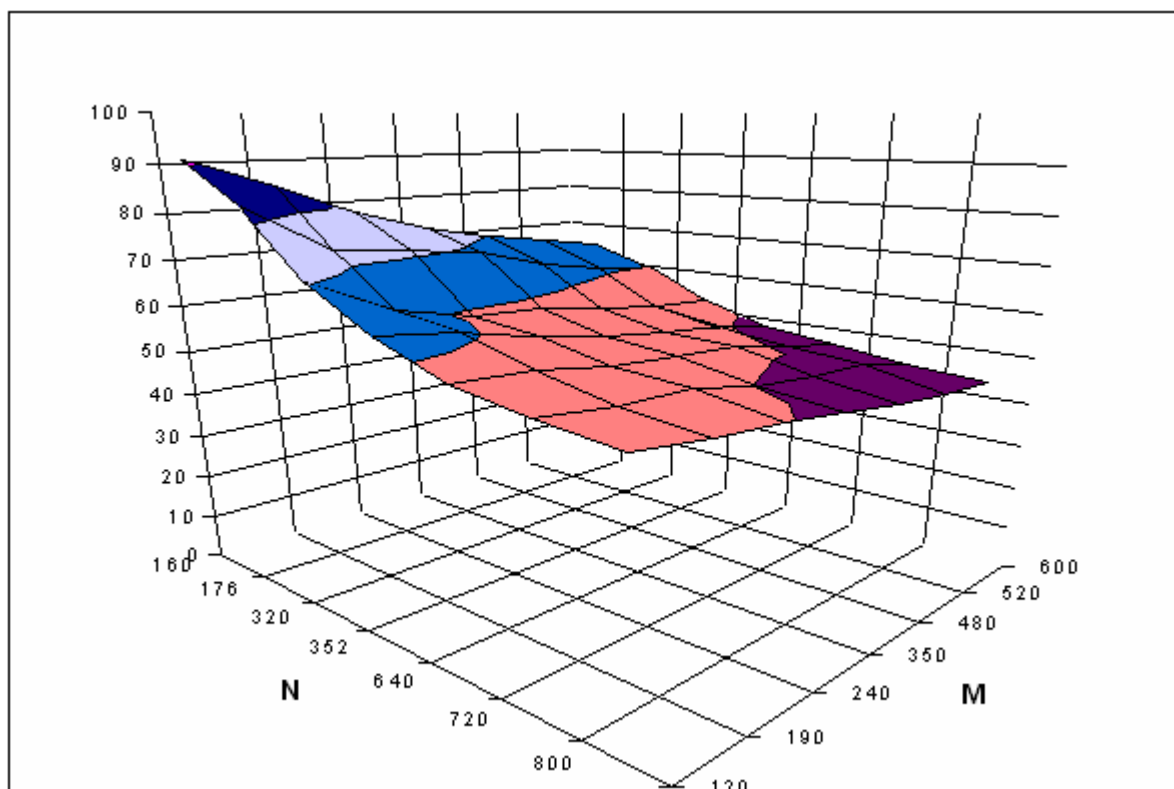


Рис.6.5. Значения $M(\delta_n)$ при изменении количества отсчетов по горизонтали N и по вертикали M

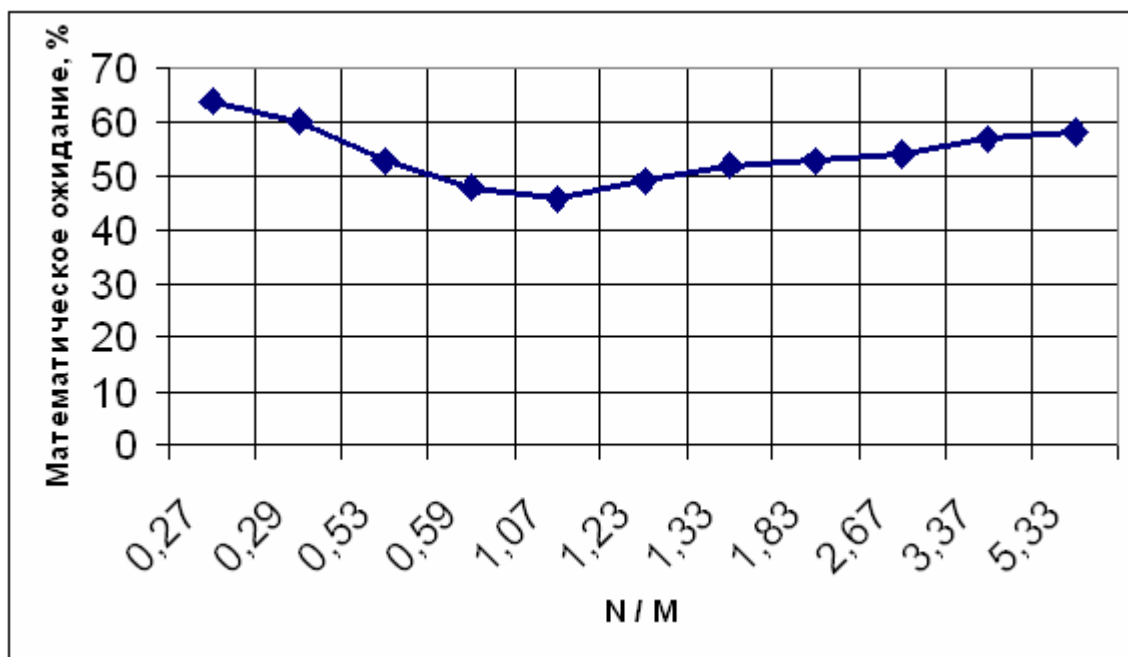


Рис. 6.6. Значения $M(\delta_n)$ при изменении соотношения N и M

По полученным диаграммам видно, что ошибка дискретизации уменьшается с количеством отсчетов. Также погрешность дискретизации принимает минимальное значение при соотношении N/M , близком к единице, что объясняется наименьшими искажениями изображения при таком соотношении.

6.5. Влияние цифровых методов обработки изображения на точность измерений

Цифровые методы обработки изображения входят в блок ПОИ и предназначены для улучшения качества изображения, а также для программной коррекции искажений, вносимых отдельными узлами устройства измерения и внешней среды. Блок ПОИ является необязательной частью устройства – предыдущие результаты были получены без его использования. Целью данных экспериментов является получение информации о влиянии ПОИ на погрешность измерений.

6.5.1 Применение медианного фильтра

Медианный фильтр предназначен для сглаживания шумов и помех на изображении, возникающих при некоторых условиях внешней среды (запыленности, неравномерного освещения и др.), а также в процессе работы электронных узлов ФЭП и АЦП.

Пример действия медианного фильтра на исходное изображение (рис.6.7) показан на рис.6.8.



Рис. 6.7. Исходное изображение объекта измерения



Рис. 6.8. Применение медианного фильтра с коэффициентом размытия

$$k_p=10$$

Применение медианного фильтра в нормальных условиях измерения не дает уменьшения погрешности измерения ($n=10$, $d=100$ мм), так как на изображении практически не присутствует шумов (рис. 7). Увеличение коэффициента сглаживания k_p приводит к искажению изображения, что влечет увеличение погрешности (см табл. 6.9 и рис.6. 9).

Таблица 6.9

Значения $M(\delta_n)$ без использования медианной фильтрации (МО -) и с использованием медианной фильтрации (МО +) при изменении коэффициента сглаживания k_p .

K_p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
МО -	44,2	44,4	44,3	44,3	44,2	44,3	44,4	44,3	44,2	44,3
МО +	44,3	44,4	44,3	44,4	44,5	44,7	45	45,2	45,3	45,4

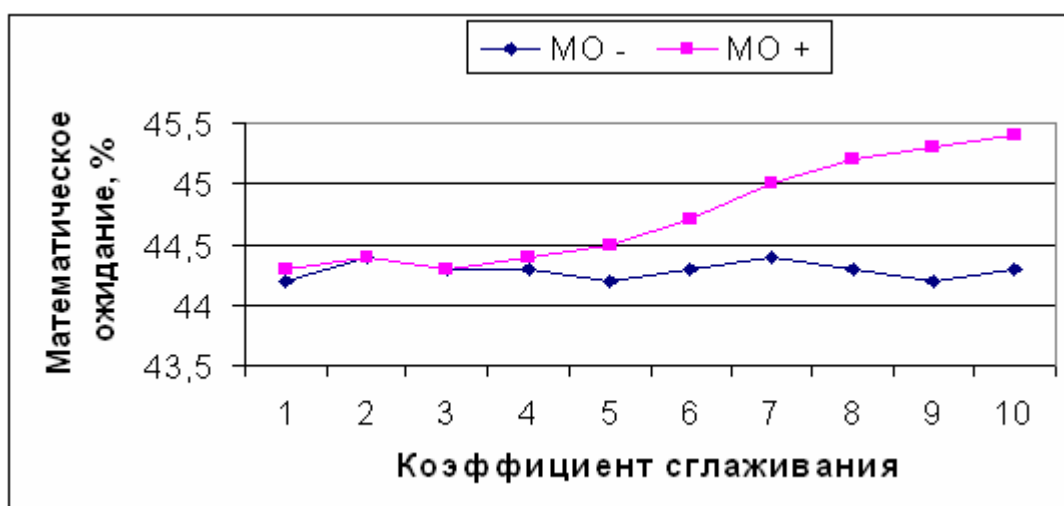


Рис.6.9. Значения $M(\delta_n)$ без использования медианной фильтрации (МО -) и с использованием медианной фильтрации (МО +) при изменении коэффициента сглаживания k_p . МО – математическое ожидание

6.5.2 Увеличение резкости изображения

На исходном изображении (рис.6.10) видно, что переход между объектом и фоном размыт. Очевидно, это отрицательно влияет на точность измерений бесконтактным методом. Использование усиления резкости ведет к усилению краев, то есть к более четкой границе между объектом и фоном (рис.6.11). Влияние многократного увеличения резкости изображения на погрешность ($n=10$, $d=100$ мм) показано в табл. 6.10 и на рис.6.12. При большом количестве увеличений резкости возникают искажения изображения, ведущие к увеличению погрешности (рис. 6.13).



Рис.6.10. Исходное изображение

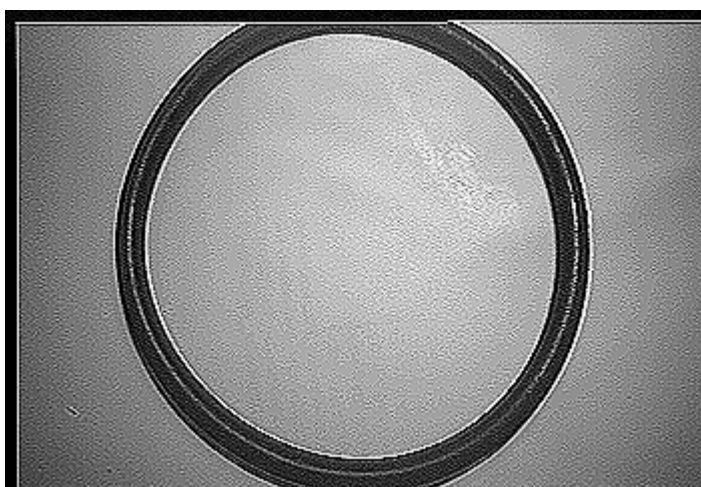


Рис. 6.11. Изображение с однократным увеличением резкости

Таблица 6.10

Влияние многократного увеличения резкости изображения на погрешность.

Кол-во раз	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
МО -	44,2	44,4	44,3	44,3	44,2	44,3	44,4	44,3	44,2	44,3
МО +	36,7	36,1	35,5	35,7	36,4	38,6	39,6	42,6	44,7	46,7

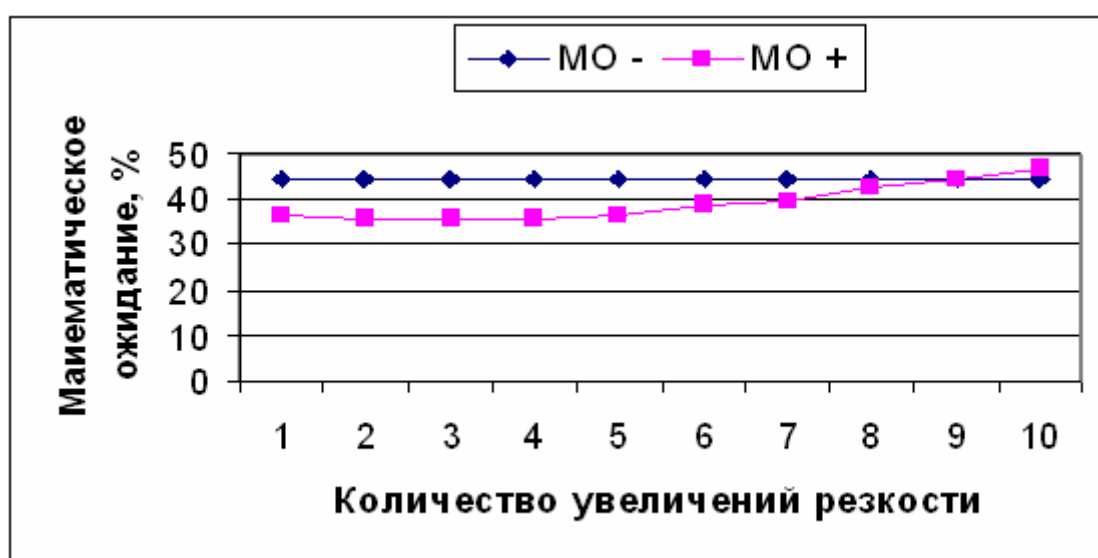


Рис.6.12. Влияние многократного увеличения резкости изображения на погрешность

6.5.3 Коррекция яркости и контрастности изображения

Данное преобразование (рис.6.15) предназначено для осветления изображения (рис.6.14) с целью предотвратить искажения при бинаризации. Для сохранения приемлемого качества изображения вместе с яркостью увеличивается контрастность. Результаты эксперимента ($n=10$, $d=100$ мм) приведены в табл. 6.11 и рис. 6.16.

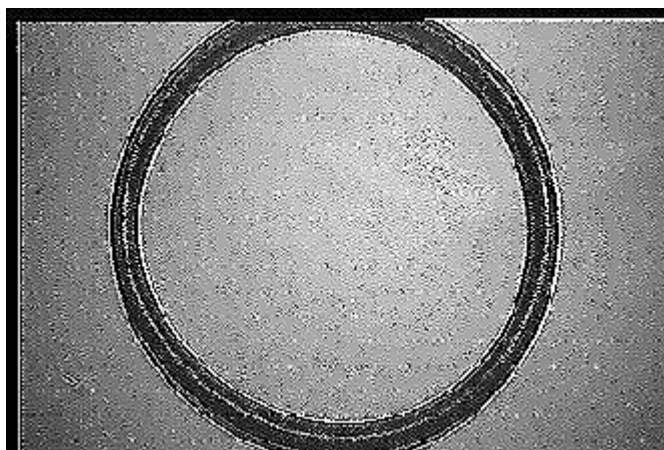


Рис.6.13. Изображение объекта измерения при 10-кратном увеличении резкости



Рис 6.14. Исходное изображение



Рис.6.15. Изображение с увеличенной контрастностью на 70% и яркостью на 70%

Влияние изменения яркости и контрастности изображения на погрешность.

Увел., %	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
МО -	44,2	44,4	44,3	44,3	44,2	44,3	44,4	44,3	44,2	44,3
МО +	44,2	44,2	44,1	44,1	43,9	43,9	43,7	43,8	44,1	44,4

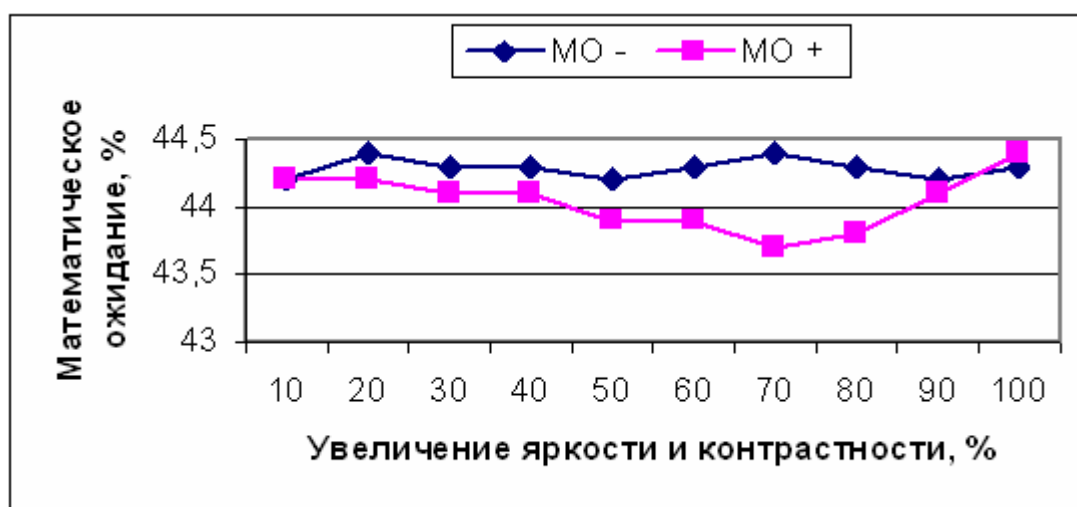


Рис.6.16. Влияние изменения яркости и контрастности изображения на погрешность

По результатам видно, что осветление дает заметное снижение погрешности при увеличении яркости и контрастности на 70 %. Дальнейшее осветление приводит к повышению погрешности.

6.5.4 Бинаризация изображения

В эксперименте исследуется два метода бинаризации:

1. Гистограммный.
2. Градиентный.

При расчете гистограммы изображения выяснилось, что они имеют глобальный максимум (рис.6.17). Таким образом, применение гистограммного метода возможно при бинаризации изображений измеряемых объектов.

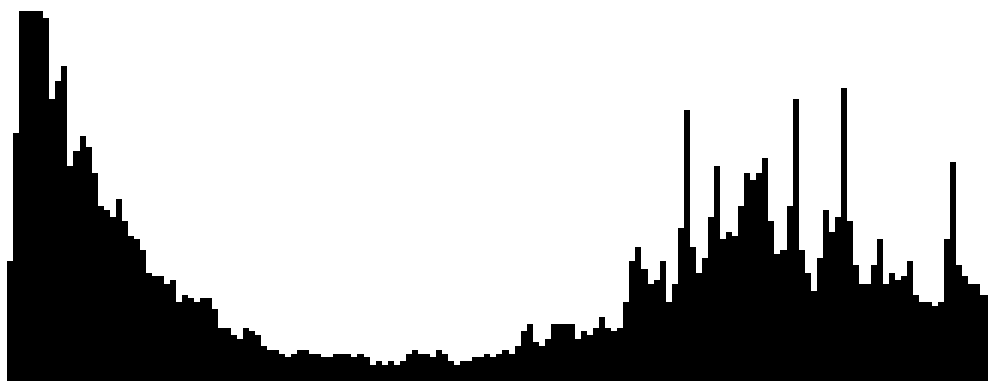


Рис.6.17. Пример гистограммы изображения объекта измерения

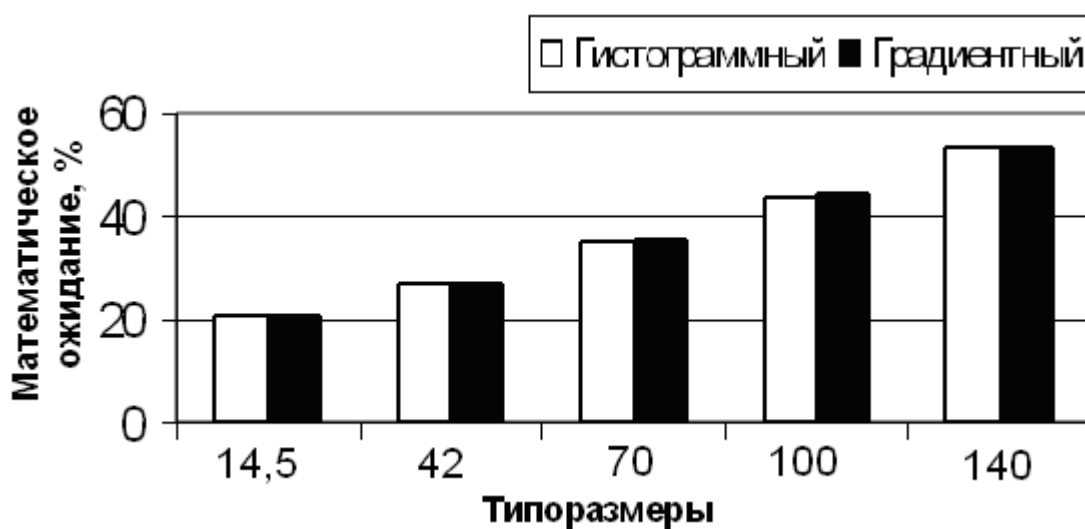


Рис.6.18. Сравнение гистограммного и градиентного методов бинаризации по математическому ожиданию приведенной погрешности

Градиентный метод менее точный, однако разница погрешностей незначительна, что видно из табл. 6.12 и рис 6.18 ($n=20$).

Таблица 6.12

Сравнение гистограммного и градиентного методов бинаризации по математическому ожиданию приведенной погрешности.

Типоразмер	14,5	42	70	100	140
МО гист.	20,5	26,3	35,1	44	53,2
МО град.	21,1	26,5	35,7	44,3	53,6

6.5.5 Сравнение алгоритмов измерения

Разработаны два алгоритма измерения внутреннего диаметра колец и манжет:

1. По длине окружности.
2. По площади отверстия.

Сравнение этих алгоритмов по влиянию на точность измерений приведено в табл. 6.13 и рис.6.19 ($n=20$, $d=100$ мм).

Таблица 6.13

Влияние алгоритма измерения на погрешность измерения.

Типоразмер	14,5	42	70	100	140
МО по длине окружности	20,5	26,3	35,1	44	53,2
МО по площади	18,7	23,6	34,2	39,5	47,6

Таким образом, наиболее точным является алгоритм измерения внутреннего диаметра по площади.

Результаты проведенных экспериментов показывают зависимость погрешности измерения от размеров самого объекта при одинаковых условиях измерений. Абсолютная погрешность не превышает величину предельного отклонения номинального значения внутреннего диаметра типоразмера (математическое ожидание приведенной погрешности не превышает 100 %).

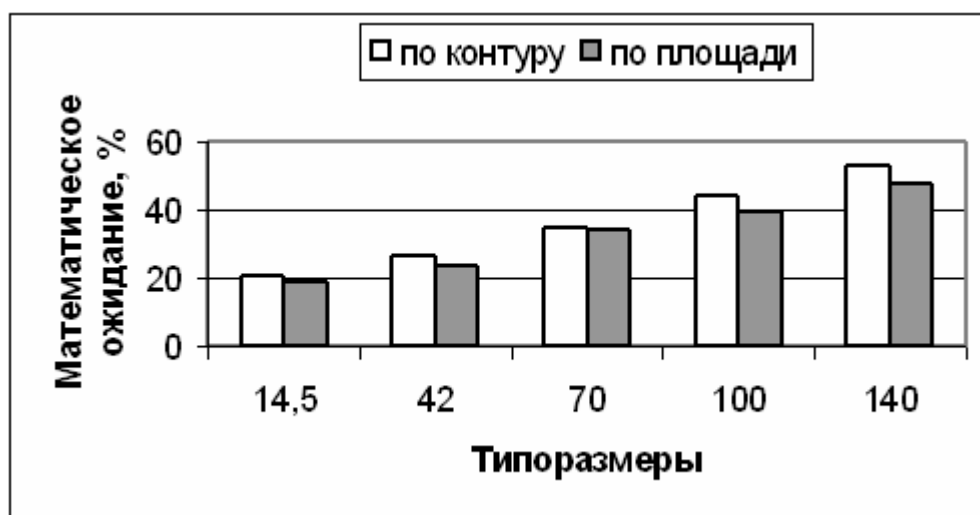


Рис.6.19. Влияние алгоритма измерения на погрешность измерения

Тот факт, что математическое ожидание приведенной погрешности имеет очень маленькую дисперсию, означает наличие систематической ошибки. При этом случайная ошибка вносит незначительный вклад в общую погрешность. Систематическая ошибка имеет положительный знак, т.е. полученные данным методом значения внутреннего диаметра превышают истинные значения, а предельное отклонение практически для всех типоразмеров отрицательно.

Систематическая ошибка, вносимая данным методом, и будет считаться методической. Для применения разработанного ИИК на практике необходимо экспериментально найти методическую ошибку для каждого типоразмера при одинаковых условиях измерения и учитывать ее при проведении измерений. В условиях производства эту процедуру необходимо автоматизировать с помощью применения программного обеспечения.

Глава 7

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ВИДИОСИСТЕМ

Применение измерительных видеосистем очень разнообразно: от астрономических до молекулярных измерений. Включение видеосистемы в состав ИИК позволяет проводить дистанционные измерения. Цифровые камеры формируют изображения с различных позиций и передают их в ЭВМ для указания опорных и измеряемых точек, а также для последующей математической обработки. Основой математической обработки служит система фотограмметрических уравнений.

Возможности цифровых измерительных видеосистем (ЦИВС) определяются совокупностью метрологических характеристик:

- рабочей областью, определяемой пересечением областей зрения видеокамер из точек съемки;
- точностью угловых измерений, определяемой качеством оптической системы и дискретностью фотоприемной матрицы;
- точностью координатных измерений, определяемой точностью задания базисных точек и качеством калибровки видеосистемы ;
- точностью измерения координат движущихся объектов, определяемой световой чувствительностью фоторегистрирующего устройства и условиями съемки.

Метрологические характеристики цифровых измерительных видеосистем зависят от их технических характеристик:

- количества измерительных видеокамер;
- разрешающей способности и светочувствительности видеокамер;
- размеров стереобазы;
- точности параметров калибровки.

Технические характеристики цифровых измерительных видеосистем могут варьировать в определенных пределах в процессе смены объектов и условий проводимых измерений и, следовательно, при этом будут изменяться и некоторые метрологические характеристики. ЦИВС

может эффективно использоваться в составе информационно-измерительного комплекса, обеспечивая систему управления информацией о состоянии объекта управления и окружающей обстановки. На рис.7.1 приведен пример структуры цифровой измерительной видеосистемы [39,40]. Видеокамеры ВК-1 и ВК-2 формируют видеосигналы, которые с помощью концентратора объединяются в общий информационный поток и по каналу связи КС передаются в ЭВМ. Если видеокамеры оснащены дистанционной системой управления, то КС должен обеспечивать двухстороннюю связь. ЭВМ отображает полученную видеоинформацию на экране для работы оператора. Программное обеспечение ПО ЦИВС решает задачи математического и алгоритмического характера в соответствии с указаниями оператора.

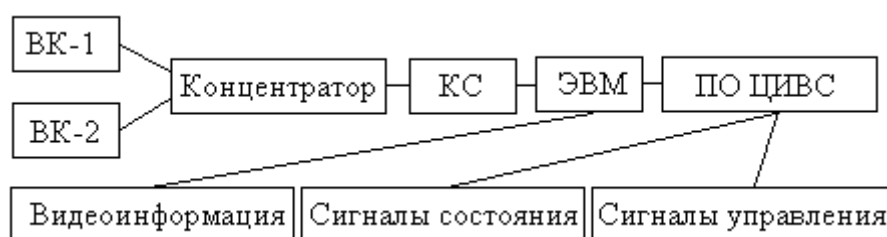


Рис.7.1. Структура цифровой измерительной видеосистемы

Гибкость структуры ЦИВС обеспечивает широкий диапазон их применения, что, в свою очередь, усложняет процесс определения метрологических характеристик. Например, если конструкция системы позволяет перемещать видеокамеры для более удобного наблюдения за объектом, то это одновременно приводит к изменению рабочей области и, следовательно, к изменению точности измерений.

7.1. Математическая модель цифровых измерительных видеосистем

Цифровая измерительная система формирует несколько снимков, на которых идентифицируются опорные и измеряемые точки, измеряются координаты этих точек в системах координат снимков и затем решается фотограмметрическая задача. Таким образом, результаты измерений являются косвенными и получаются путем применения уравнений фотограмметрии [19]. Каждая опорная точка дает два нелинейных уравнения:

$$\begin{cases} F_x(f, x_i, \overline{R}_i, \overline{\varphi}, \overline{R}_s) = ((x_i - x_c)A_2(\overline{\varphi}) - f \cdot A_0(\overline{\varphi}))(\overline{R}_i - \overline{R}_s) = 0 \\ F_y(f, y_i, \overline{R}_i, \overline{\varphi}, \overline{R}_s) = ((y_i - y_c)A_2(\overline{\varphi}) - f \cdot A_1(\overline{\varphi}))(\overline{R}_i - \overline{R}_s) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

где f - фокусное расстояние, i - номер ОТ, x_i, y_i - координаты ОТ в системе координат кадра, x_c, y_c - координаты центра кадра, $\overline{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$ - вектор координат ОТ в объектной системе координат, $\overline{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ - вектор угловых параметров ориентации оптической оси камеры, $\overline{R}_s = (X_s, Y_s, Z_s)^T$ - вектор координат центра проектирования в объектной системе координат, $A_j(\overline{\varphi})$ - строка номер j матрицы $A(\overline{\varphi})$,

$$A(\overline{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) \\ 0 & \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_x) & 0 & \sin(\varphi_x) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_x) & 0 & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y) & -\sin(\varphi_y) & 0 \\ \sin(\varphi_y) & \cos(\varphi_y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (7.1), записанные для всего множества опорных и измеряемых точек в совокупности с данными об опорных точках и параметрах ориентации камер, образуют математическую модель измерительной видеосистемы.

Конфигурация ЦИВС и условия проведения измерений определяют структуру априорных данных об опорных точках и параметрах ориентации. Возможны следующие типичные варианты структуры априорных данных:

- полный набор параметров ориентации $(f, x_c, y_c, \overline{R}_s, \overline{\varphi})$ для всех камер;
- параметры внутренней ориентации (f, x_c, y_c) для всех камер и данные об опорных точках;
- только данные об опорных точках.

Доступность полного набора параметров ориентации позволяет решать фотограмметрические уравнения без использования опорных точек, которые могут использоваться просто для контроля правильности или повышения точности измерений. Такая структура соответствует стационарным измерительным установкам [20].

Параметры внутренней ориентации становятся известными после калибровки измерительной системы. Если последующие измерения не требуют их изменения, то основным назначением опорных точек является обеспечение определенности или переопределенности системы фотограмметрических уравнений, т.е. для вычисления параметров внешней ориентации. Следует отметить, что изменение величины фокусного расстояния в общем случае приводит к изменению и координат центра кадра. Отсутствие известных параметров ориентации соответствует задаче калибровки ЦИВС.

Решение нелинейной системы фотограмметрических уравнений требует наличия хорошего начального приближения решения, которое формируется на основе паспортных данных видеокамер и предварительных сведений об их ориентации. Чем больше степень переопределенности системы, тем устойчивей и точнее решение. Алгоритмы решения таких систем строятся на основе методов оптимизации, где в качестве целевой функции используется мера невязки.

Принципы фотограмметрии можно распространить и для случая измерения координат точек, находящихся в преломляющем слое, например, в воде. Такому варианту измерений соответствует рис.7.2.

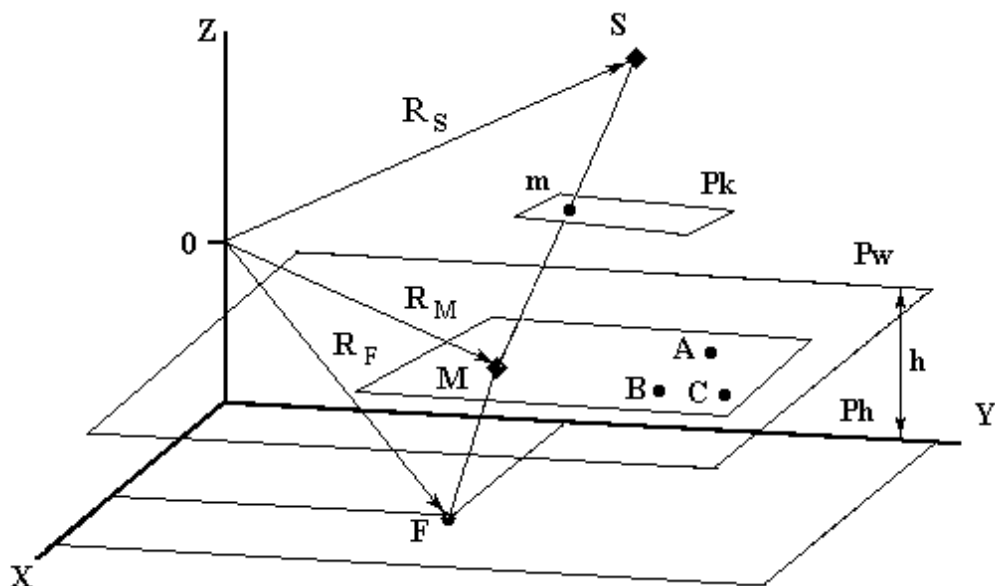


Рис.7.2. Модель формирования изображения точки с учетом преломляющего слоя

Центр проектирования S и изображение точки объекта m , лежащее в плоскости изображения P_k , позволяют построить траекторию падающего луча SM , где M – точка преломления, находящаяся на поверхности жидкости P_w . Преломленный луч MF соединяет точку преломления M и точку измеряемого объекта F , находящуюся в жидкости на глубине h в плоскости P_h . Поверхность раздела преломляющих сред может быть идентифицирована минимум тремя опорными точками A, B и C , находящимися непосредственно на ней. Радиус-вектор, определяющий положение измеряемой точки F , вычисляется следующим образом:

$$\bar{R}_F = \bar{R}_M + h \cdot \left(\frac{\bar{R}l_\tau}{\sqrt{n^2 - |\bar{R}l_\tau|^2}} - \bar{w} \right), \quad (7.2)$$

где, h – глубина погружения точки F объекта,

\bar{w} – вектор нормали к поверхности жидкости,

n - показатель преломления жидкости,

$\bar{R}_M = (X_M, Y_M, Z_M)^T$ - радиус-вектор точки преломления,

$$X_M = X_S + Z_S \cdot \frac{(x_F, y_F, -f) \cdot A_0(\bar{\varphi})}{(x_F, y_F, -f) \cdot A_2(\bar{\varphi})}, Y_M = Y_S + Z_S \cdot \frac{(x_F, y_F, -f) \cdot A_1(\bar{\varphi})}{(x_F, y_F, -f) \cdot A_2(\bar{\varphi})}, Z_M = 0,$$

(x_F, y_F) – координаты точки F в плоскости изображения,

$\overline{SM} = \overline{R}_M - \overline{R}_S$ – вектор, соединяющий центр проектирования S и точку преломления M,

$\overline{Rl} = \frac{\overline{SM}}{|\overline{SM}|}$ – единичный вектор луча SM,

\overline{Rl}_τ – касательная составляющая единичного вектора падения \overline{Rl} у поверхности воды,

$\overline{R}_F = (X_F, Y_F, Z_F)$ – радиус-вектор точки F измеряемого объекта.

Решение полученной задачи находится методами, аналогичными для задачи (6.1).

7.2. Аппаратная реализация цифровых измерительных видеосистем

Требуемые метрологические характеристики ЦИВС служат исходными данными для формирования структуры и аппаратного состава системы. Размер рабочей области и количество пикселей видеокамер однозначно определяют точность измерения координат и углов.

Основными элементами ЦИВС являются цифровые видеокамеры, позволяющие получать изображения в реальном масштабе времени. Типичный размер раstra цифровых изображений: 640x480 пикселей, что примерно соответствует телевизионному стандарту. Если угол обзора составляет 90° , то типичное угловое разрешение составит $\sim 0.14^\circ$, что соответствует 25мм на расстоянии 10м. Современные ПЗС матрицы видеокамер обладают информативность до 10 мегапикселей, что соответствует разрешению 4мм на расстоянии 10м.

Частота кадров видеокамеры зависит от информативности ПЗС матрицы и быстродействия ее основных элементов: АЦП, видео ОЗУ (ВОЗУ), контроллера и интерфейса. Быстродействие элементов видеокамеры пропорционально квадрату разрешающей способности ПЗС, при постоянной частоте кадров. Высоко информативные ПЗС могут использоваться только для фотосъемки, так как их максимальная частота кадров не обеспечивает кинематографического эффекта. Например, для обеспечения частоты кадров 15 Гц ПЗС матрицы информативностью 1 мегапиксель требуется АЦП, имеющий частоту преобразования не менее 15 МГц, и контроллер с тактовой частотой ~600МГц.

Структура цифровой измерительной видеокамеры представлена на рис.7.3. Кроме указанных элементов видеокамера может быть оснащена системами автофокусировки, автоматического назначения выдержки и температурной стабилизации.

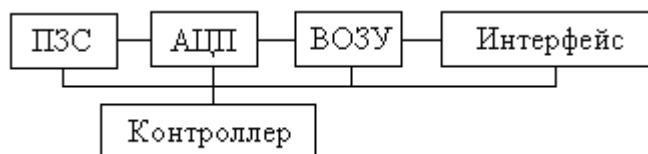


Рис.7.3. Структура цифровой измерительной видеокамеры

На микроконтроллере в видеоаппаратуре лежат задачи управления ПЗС матрицей, видео ОЗУ, сервисными устройствами и каналом связи с ЭВМ. Концентраторы предназначены для слияния информационных потоков нескольких видеокамер для последующей передачи их в ЭВМ.

Каналы связи должны обеспечивать обмен информацией между ЭВМ, видеокамерами, датчиками и микроконтроллерами. Выбор конкретного вида канала связи зависит от условий эксплуатации ЦИВС: кабельная сеть позволяет достаточно просто и быстро организовать надежную связь в пределах до ~200 метров, радиосвязь требует выделения частотного диапазона и подвержена воздействию помех, ИК каналы связи аппаратно

максимально просты и работоспособны при удалении до ~50 метров и требуют прямой видимости между приемником и передатчиком.

Получение информации о температуре, прозрачности, химическом составе окружающей среды и т.п. требует применения соответствующих датчиков, устройств согласования, АЦП, каналов связи, что также обуславливает применение микроконтроллеров в качестве устройств распределенного управления.

7.3. Программно-алгоритмическое обеспечение цифровых измерительных видеосистем

Взаимодействие элементов ЦИВС, организация процесса измерений и необходимые математические вычисления осуществляются с помощью программно-алгоритмического обеспечения. Носителями программного обеспечения являются ЭВМ и микроконтроллеры.

ПО должно содержать процедуры:

- выбора момента регистрации изображений;
- передачи и визуализации информации в ЭВМ;
- идентификации опорных и измеряемых точек;
- численной и статистической обработки;
- ведения и редактирования электронного журнала измерений;
- автоматического формирования сигналов управления;
- помощи и рекомендаций оператору системы.

В зависимости от характера измерений ОТ могут идентифицироваться автоматически или вручную оператором. Автоматическое опознавание точек может опираться на следующие методы: оснащение точек контрастными или мигающими маркерами, размещение точек на границах контрастных областей с заранее известной и постоянной конфигурацией.

Разработка программного обеспечения ЭВМ требует использования языков высокого уровня. Например, среда программирования Builder C++ имеет специальные компоненты для быстрого преобразования и отображения изображений. Эти компоненты позволяют управлять программой с помощью общепринятых средств: экранными кнопками, редактируемыми строками и окнами ввода цифровой и текстовой информации. Блокирование ошибочных действий оператора предотвращается шаблонами и масками вводимой информации и последовательности операций. Результаты измерений должны автоматически протоколироваться и заноситься в базу данных, также созданную на основе стандартных компонент, что обеспечивает переносимость результатов измерений в другие программы. Целесообразно все обработанные изображения, которые использовались при формировании отчета, так же сохранять в базе данных. Это обеспечивает возможность контроля правильности работы оператора и коррекции возможных ошибок путем повторной обработки изображений.

Функции API "Multimedia Program" для мультимедийных приложений упрощают процесс разработки программ для работы со стандартными источниками изображений. Данные функции дают возможность выбора источника видеoinформации и регулировки параметров изображения, таких как разрешение, яркость, контрастность, насыщенность, перевод в градации серого цвета. Применения нестандартных устройств требует создания специальных драйверов и процедур для работы в ОС Windows.

Тиражируемое программное обеспечение целесообразно распространять в виде дистрибутивов, которые позволяют автоматизировать процесс установки программы: выбрать необходимые компоненты, отредактировать реестр и файлы конфигурации, установить необходимые сетевые адреса, сформировать корректный деинсталлятор. Для установки программы можно установить пароль. Дистрибутивы создаются на основе

файлов созданного программного обеспечения с помощью какого-либо инсталлятора, например, "Install Shield Admin Studio".

Использование микроконтроллеров требует наличия программатора и специального программного обеспечения для процессов разработки, отладки и записи программ. Наиболее часто используется язык ассемблера, так как он способен обеспечить наибольшее быстродействие системы и позволяет экономно использовать память. Указанные параметры особенно важны для работы с высокоинформативной видеоинформацией.

Например, для PIC-микроконтроллеров используется специальная среда разработки программного обеспечения MPLAB, которая выполняет функции редактора, компилятора, компоновщика, программатора и эмулятора. Среда MPLAB во время отладки программы позволяет задавать синхронные и асинхронные воздействия на входы микроконтроллера и контролировать результаты их воздействия.

7.4. Влияние дискретности изображений на точность цифровых измерительных видеосистем

Видеокамеры имеют строго ограниченное количество элементов формируемого изображения, что обуславливает появление соответствующей составляющей погрешности измерений. Расстояние δ между ближайшими точками в плоскости изображения (ПИ) будем называть зернистостью. Данная величина постоянна во всей ПИ и является характеристикой дискретности изображения. Координаты пикселей задаются следующим образом: $x(i, j) = \delta \cdot i$, $y(i, j) = \delta \cdot j$, где i, j - номера строк и столбцов. Если оптическая ось не перпендикулярна к объектной плоскости (ОП), то соответствующая проекция точек дискретного изображения не будет обладать свойством постоянства зернистости в ОП. Множество точек ПИ $\{x(i, j), y(i, j)\}$ отображается на множество точек ОП $\{\xi(i, j), \eta(i, j)\}$. Пример

проекция равномерного в ПИ поля зернистости на ОП, полученный на основе приведенных выше формул, для углового отклонения 35° , показан на рис.7.4.

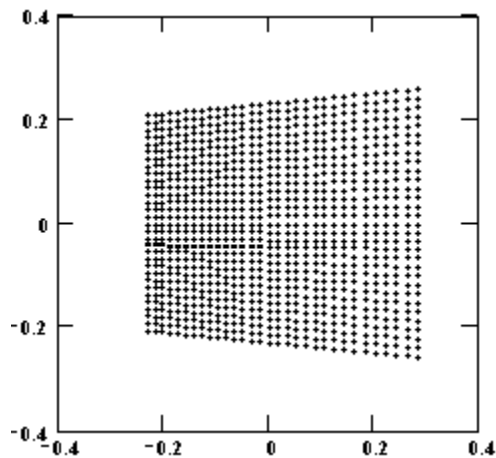


Рис.7.4. Проекция поля зернистости в объектной плоскости

Неравномерность поля зернистости удобно оценивать, если ее нормировать к величине равномерной зернистости, соответствующей перпендикулярному положению оптической оси к ОП. Значения нормированного поля зернистости определяются следующим образом:

$$\delta\xi(i, j) = (\xi(\delta \cdot i, \delta \cdot j) - \xi(\delta \cdot (i-1), \delta \cdot j)) / \delta,$$

$$\delta\eta(i, j) = (\eta(\delta \cdot i, \delta \cdot j) - \eta(\delta \cdot i, \delta \cdot (j-1))) / \delta.$$

Графики зависимости нормированной зернистости от координат в горизонтальном и вертикальном направлениях для стандартного углового поля зрения (27°) при глубине, равной ширине поля зрения, и угле отклонения оптической оси, равного 2° , приведены на рис.7.5.

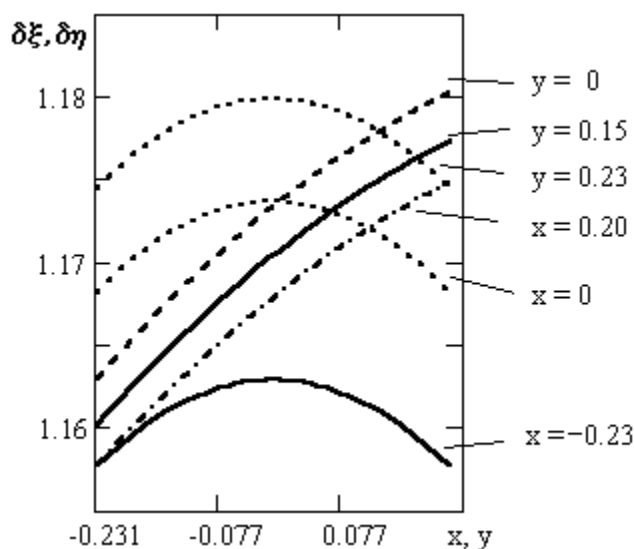


Рис.7.5. Зависимости нормированной зернистости от координат в горизонтальном и вертикальном направлениях

Максимальную величину зернистости можно рассматривать как верхнюю границу погрешности измерения координат в ОП. Графики зависимости максимальной зернистости от глубины $\delta(h)$ и от угла отклонения оптической оси от вертикали $\delta(\varphi)$ приведены на рис.7.6.

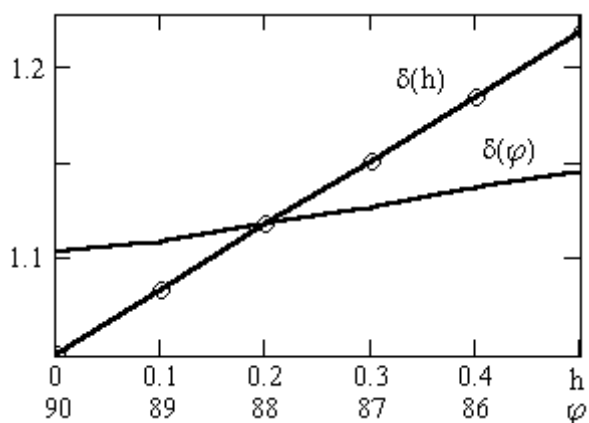


Рис.7.6. Зависимость максимальной зернистости от глубины и от угла отклонения оптической оси

Уравнения (7.1) и (7.2) позволяют рассчитать погрешность измерения координат точек в ОП. Для этого целесообразно использовать методику косвенных измерений [21]. Величину ошибки косвенных измерений можно

оценить, учитывая параметры ориентации видеокамеры и преломляющего слоя. Непосредственно измеряемыми являются координаты точек в плоскости изображения, а координаты в объектной плоскости вычисляются по ним. Для оценки чувствительности погрешности вычислений координат в ОП к изменению погрешностей в определении координат в плоскости изображения используют общеизвестный метод [21], заключающийся в определении частных производных оцениваемой функции по каждому независимому фактору. Дисперсия суммарной погрешности для некоррелированных составляющих определяется по следующей формуле:

$$\sigma^2(x, y, \varphi, h) = \sigma_{\xi}^2(x, y, \varphi, h) + \sigma_{\eta}^2(x, y, \varphi, h) ,$$

$$\text{где } \sigma_{\xi}^2(x, y, \varphi, h) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 ,$$

$$\sigma_{\eta}^2(x, y, \varphi, h) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 .$$

Оптическая ось измерительной системы, обычно, вертикализуется для обеспечения наибольшей равномерности поля зернистости, поэтому параметр σ_{φ}^2 можно трактовать как случайное отклонение угла в интервале $\varphi \in [-\varphi_m, \varphi_m]$. Случайному положению измеряемого объекта по глубине соответствует величина h , принадлежащая интервалу $h \in [0, h_m]$. Если считать, что измеряемые величины (x, y, φ, h) подчинены равномерному закону распределения, то их дисперсии будут иметь следующий вид:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \delta^2/12, \quad \sigma_{\varphi}^2 = \varphi_m^2/3, \quad \sigma_h^2 = h_m^2/12.$$

Зависимость дисперсии $\sigma^2(x, y, \varphi)$ от координат в плоскости изображения представлена на рис.7.7. При построении этого графика дисперсии зернистости, угла и глубины были нормированы так, чтобы их максимальные значения были одинаковы.

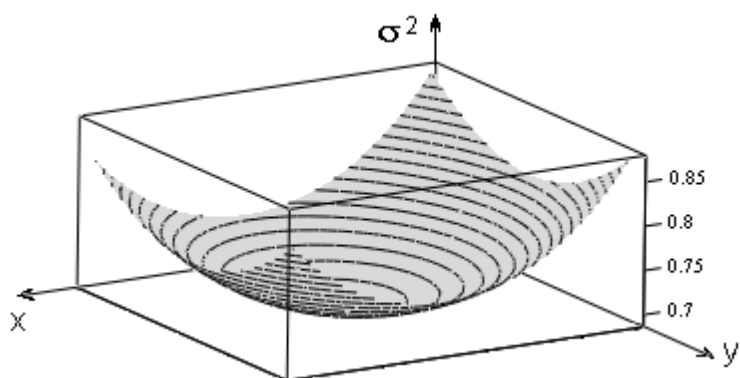


Рис.7.7. Зависимость дисперсии от координат в плоскости изображения

7.5. Вероятностная оценка количества контролируемых объектов

Положение объектов на ОП и в преломляющем слое произвольно, что предполагает возможность формирования системой контроля такого изображения, когда проекции отдельных объектов в ПИ сливаются. В ситуации, когда объектов много и они подвижны, проведение повторной регистрации изображения не позволит существенно уточнить их количество. Пусть результатом подсчета числа объектов является число видимых объектов n_v , которое можно определить либо по одному изображению, либо путем усреднения по нескольким кадрам. Тогда действительное число объектов n приближенно определяется следующим соотношением:

$$n = n_v + m_r(n), \quad (7.3)$$

где $m_r(n)$ - среднее число не разрешаемых объектов, r - радиус разрешения. Вид функции $m_r(n)$ определяется законом распределения объектов в поле зрения системы контроля. Вычислить функцию $m_r(n)$ можно на основе методов геометрических вероятностей [22]. Будем считать, что распределение объектов в поле зрения системы подчинено равномерному закону и что изображения двух соседних объектов сливаются, если расстояние между их геометрическими центрами меньше или равно величине

г. Такие предположения позволяют получить вероятность слияния изображений k объектов в следующем виде:

$$p_k = C_n^k \cdot (1 - \exp(-\lambda\pi r^2))^k \cdot (\exp(-\lambda\pi r^2))^{n-k}$$

Математическое ожидание $m_r(n)$ и дисперсия $\sigma_r^2(n)$ числа объектов, изображения которых не разрешимы, имеют следующий вид:

$$m_r(n) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot k, \quad \sigma_r^2(n) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot (k - m_r(n))^2.$$

Графики зависимости математического ожидания $m_r(n)$ и дисперсии $\sigma_r^2(n)$ от величины параметра разрешения r приведены на рис.7.8.

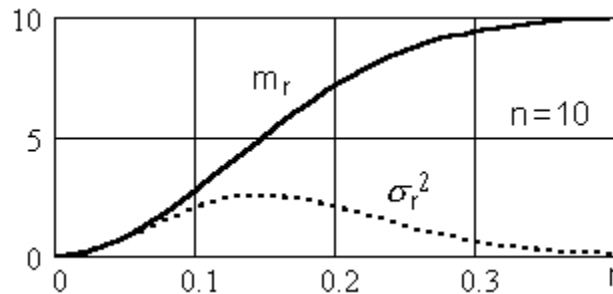


Рис.7.8. Зависимость математического ожидания и дисперсии от величины параметров разрешения

Максимальное количество разрешаемых объектов равно $n_v \leq \pi^{-1}r^{-2}$, что соответствует множеству решений уравнения (7.3), представленного в виде графика на рис.7.9.

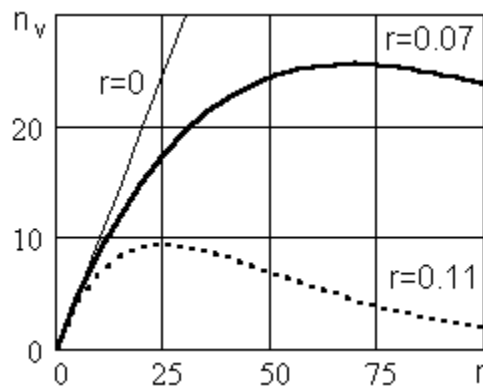


Рис.7.9. Зависимость числа видимых объектов от их действительного числа

Рассмотренный метод оценки позволяет по числу выявленных на изображении объектов оценить их действительное количество.

Глава 8

ИЗМЕРЕНИЕ КООРДИНАТ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В данном разделе исследуется структура НС, которая формирует на своем выходе числовой параметр, соответствующий измерительной информации, отображающей положение некоторого объекта, имеющего заданную форму. Кроме того, рассматривается методика формирования требований к структуре и качеству обучения таких НС. В качестве входной информации рассматривается дискретное изображение, которое кроме изображения объекта, содержит изображение окружающей объект сцены. Считается, что постоянно лишь изображение объекта, а его положение и окружающая сцена могут меняться.

Известные типы НС [43,44] служат для решения задач распознавания и классификации различных объектов. Вектор выходного сигнала НС определяется видом активационной функции и представляет собой один из следующих возможных вариантов:

- вектор бинарных сигналов;
- вектор сигмоидальных или потенциальных сигналов;
- вектор ограниченно-линейных сигналов.

Компоненты этих векторов могут формировать относительно независимые сигналы или образовывать единую величину. Например, номер каждого выхода соответствует одному наперед заданному номеру эталона.

В данном разделе исследуется возможность использования НС в качестве измерительной системы, выходные сигналы которой образуют единый двоичный код измеряемой величины. Каждый отдельный выход такой НС отображает лишь один двоичный разряд измеряемой величины.

8.1. Структура измерительной системы, использующей НС

Измерительная система имеет следующие элементы:

- фотоприемное устройство, формирующее прямоугольную матрицу изображения сцены;
- нейронную сеть, имеющую заданное число слоев и количество нейронов в каждом слое;
- блок обучения;
- блок формирования результатов измерения.

Матрица входного изображения преобразуется в вектор входных сигналов НС. Если матрица имеет размер $m \times n$, то длина входного вектора равна $m \times n + 1$, так как добавляется еще одна компонента, предназначенная для инициирования коэффициентов смещения НС. Структура измерительной системы, использующей нейронную сеть, приведена на рис.8.1.

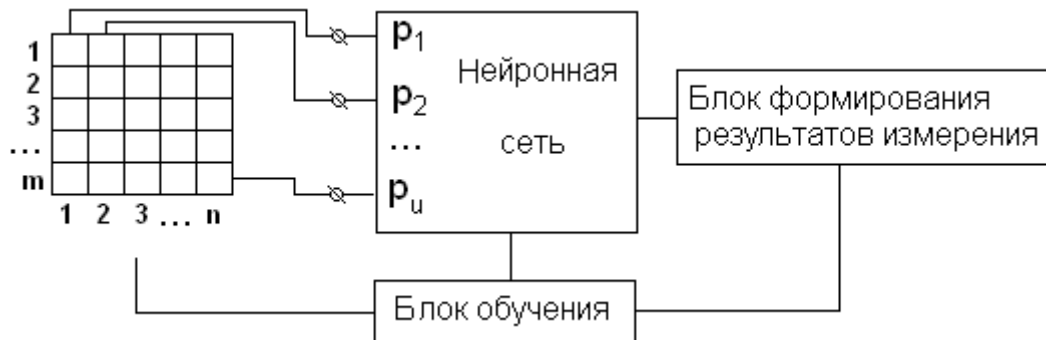


Рис.8.1. Структура измерительной системы, использующей нейронную сеть

Количество нейронов в каждом слое определяется сложностью решаемой задачи распознавания. Количество нейронов в последнем слое соответствует формату результата: так как НС измеряет две координаты, каждая из которых может принимать 2^{N_k} значений, то выходной слой должен иметь $2 \cdot N_k$ нейронов. В общем случае, количество нейронов выходного слоя равно:

$$N_k = \text{ceil}(\log_2(L_x/\delta x)) \cdot \text{ceil}(\log_2(L_y/\delta y)),$$

где $\text{ceil}(\cdot)$ - функция округления до целого значения в сторону увеличения, L_x, L_y - размеры изображения, $\delta x, \delta y$ - требуемая точность измерений.

Количество нейронов первых слоев НС должно быть в 7 раз больше, чем количество распознаваемых ситуаций. Это требование является гипотетическим и выдвинуто по аналогии с требованиями к НС Хопфилда и Хэмминга. В общем случае, это требование выражается следующей формулой:

$$N_1 = 7 \cdot \text{ceil}((L_x/\delta x) \cdot (L_y/\delta y)).$$

В случае рассматриваемого примера, это количество равно $7 \cdot 16 \cdot 16 = 1792$. Однако, это число можно уменьшить, считая, что НС имеет два независимых канала определения каждой координаты. В этом случае, количество нейронов составит $(16+16) \cdot 7 = 224$. Для такого подхода общая зависимость будет иметь вид:

$$N_1 = 7 \cdot ((L_x/\delta x) + (L_y/\delta y)).$$

Следует иметь в виду, что уменьшение количества нейронов в соответствии с последней формулой снизит достоверность измерений, поскольку вариация координаты смежного канала будет соответствовать помеховому сигналу.

Структура НС, формирующей на выходе координаты объекта в виде четырехразрядного бинарного кода, приведена на рис.8.2.

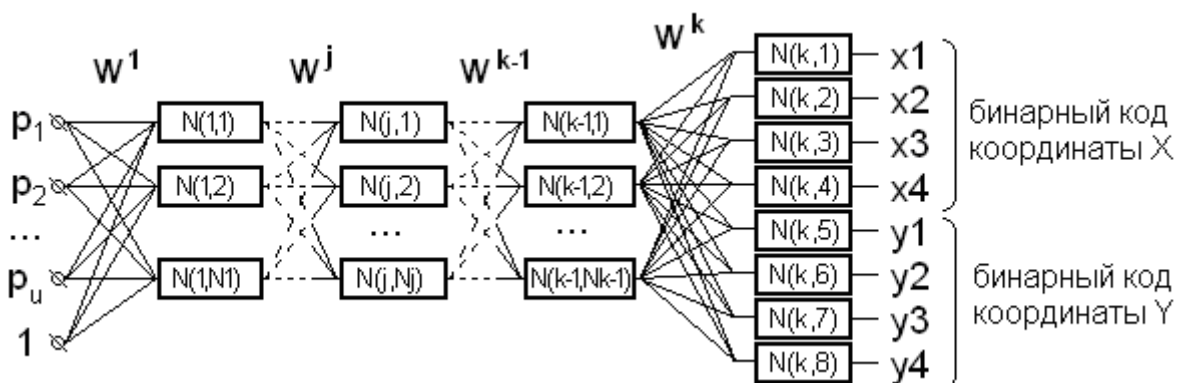


Рис.8.2. Структура НС, формирующей на выходе координаты объекта

Обозначение нейронов сети имеет следующий вид: $N(j,i)$, где i - номер нейрона в j -том слое, N_j - количество нейронов j -того слоя.

8.2. Формирование обучающей выборки

Обучающая выборка играет решающую роль в процессе обучения, так как только она может реализовать все потенциальные свойства НС, заложенные в структуре и алгоритме обучения НС. Каждый элемент обучающей выборки состоит из двух векторов: вектора элементов входного изображения и вектора соответствующего выходного сигнала. Другими словами, каждый элемент – это изображение сцены с измеряемым объектом в определенном положении и пара координат, соответствующих этому положению. Обучающая выборка обычно характеризуется следующими характеристиками: представительностью, точностью и достоверностью.

Объем и правило распределения элементов обучающей выборки в поле обзора измерительной системы определяют уровень ее представительности. Исходя из назначения НС, состоящего в определении координат объекта, обучающую выборку целесообразно формировать в виде сетки возможных положений объекта. Шаг этой сетки необходимо сопоставлять с размерами объекта и требуемой точностью измерений. Излишне мелкий шаг, очевидно, замедлит процесс обучения, крупный – снизит точность измерений.

НС способны решать интерполяционные задачи, поэтому шаг обучающей сетки может быть больше в несколько раз требуемой точности измерений. Однако, качество интерполяции, реализуемой НС, существенно зависит от алгоритма обучения. Справедливость данного допущения проверяют экспериментальным путем.

Достоверность обучающей выборки характеризуется уровнем помех в элементах выборки. Помехи в обучающем выходном векторе играют абсолютную деструктивную роль в процессе обучения. Помехи в обучающем

входном изображении могут играть положительную роль, если их уровень не слишком высок. Присутствие управляемого по интенсивности шума в обучающей выборке замедляет процесс обучения, но при этом усиливает интерполяционные свойства НС, то есть повышает устойчивость процесса обучения.

8.3. Алгоритм обучения нейронных сетей

Обучение нейронной сети осуществлялось методом обратного распространения ошибки. Данный метод хорошо изучен и достаточно устойчив. Он представляет собой градиентный метод поиска минимума функции, учитывающий слоистую структуру НС. Сигналы ошибки распространяются от выходов НС к ее входам, в направлении, обратном прямому распространению сигналов в обычном режиме работы. Согласно методу наименьших квадратов минимизируемой целевой функцией ошибки НС является сигнал ошибки обучения:

$$E(w) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j,p} (y_{j,p}^{(N)} - d_{j,p})^2,$$

где $y_{j,p}^{(N)}$ - реальное выходное состояние нейрона j выходного слоя N нейронной сети при подаче на ее входы p -го образа; $d_{j,p}$ - идеальное (желаемое) выходное состояние этого нейрона. Суммирование ведется по всем нейронам выходного слоя и по всем обрабатываемым сетью образам. Минимизация ведется методом градиентного спуска, что означает подстройку весовых коэффициентов следующим образом:

$$\Delta w_{ij}^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E}{\partial w_{ij}},$$

где $w_{ij}^{(n)}$ - весовой коэффициент синаптической связи; i - номер нейрона; j - номер входа нейрона; n - номер слоя; η - коэффициент скорости обучения, $0 < \eta < 1$. Производная сложной функции имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{ds_j} \cdot \frac{\partial s_j}{\partial w_{ij}},$$

где y_j - выход нейрона j ; s_j - взвешенная сумма входных сигналов, то есть аргумент активационной функции. Для производной сигнала ошибки по выходному сигналу имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{ds_k} \cdot \frac{\partial s_k}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{ds_k} \cdot w_{jk}^{(n+1)}.$$

Здесь суммирование по k выполняется среди нейронов слоя $n+1$.

Введя новую переменную

$$\delta_j^{(n)} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{ds_j},$$

получим рекурсивную формулу для расчетов величин $\delta_j^{(n)}$ слоя n из величин $\delta_k^{(n+1)}$ слоя $n+1$:

$$\delta_j^{(n)} = \left[\sum_k \delta_k^{(n+1)} \cdot w_{jk}^{(n+1)} \right] \cdot \frac{dy_j}{ds_j}.$$

Для выходного слоя:

$$\delta_i^{(N)} = (y_i^{(N)} - d_i) \cdot \frac{dy_i}{ds_i}.$$

Теперь можно записать основное выражение для весовых коэффициентов в обобщенном виде:

$$\Delta w_{ij}^{(n)} = -\eta \cdot \delta_j^{(n)} \cdot y_i^{(n-1)}$$

Рассмотренный метод обучения не всегда приводит к правильному решению, что обусловлено рядом причин. Во-первых, в процессе обучения может возникнуть ситуация, когда большие положительные или отрицательные значения весовых коэффициентов сместят рабочую точку на

сигмоидах многих нейронов в область насыщения. Малые величины производной от логистической функции приведут к остановке обучения, что парализует НС. Во-вторых, применение метода градиентного спуска не гарантирует, что будет найден глобальный, а не локальный минимум целевой функции. Эта проблема связана еще с одной, а именно - с выбором величины скорости обучения. Доказательство сходимости обучения в процессе обратного распространения основано на производных, то есть приращения весов и, следовательно, скорость обучения должна быть бесконечно малой, однако в этом случае обучение будет происходить неприемлемо медленно. С другой стороны, слишком большие коррекции весов могут привести к постоянной неустойчивости процесса обучения. Несмотря на указанные недостатки, рассмотренный метод считается одним из наиболее эффективных методов.

8.4. Влияние способа иницирования НС на процесс обучения

Иницирование весовых коэффициентов НС рекомендуется осуществлять множеством случайных чисел. Такой способ обосновывается тем, что если использовать нулевые начальные значения весовых коэффициентов, то НС будет «мертвой», то есть она не будет реагировать на входные сигналы. Интересный результат получается при регулярном ненулевом иницировании.

Карта матрицы весовых коэффициентов – это отображение матрицы в виде изображения, яркость или цвет элементов которого пропорциональны величине элементов матрицы. С целью наглядности трансформации весовых коэффициентов начальные значения матриц были взяты не случайными, а заданы с помощью следующей функции:

$$W_{i,j} = \frac{i+j}{ik+jk} \cdot 2^{-1},$$

где $i=1..ik, j=1..jk$. Такая зависимость обеспечивает монотонный рост элементов матрицы по мере роста номеров строк и столбцов в пределах от -1 до +1. Примеры таких карт приведены на нижеследующих рисунках.

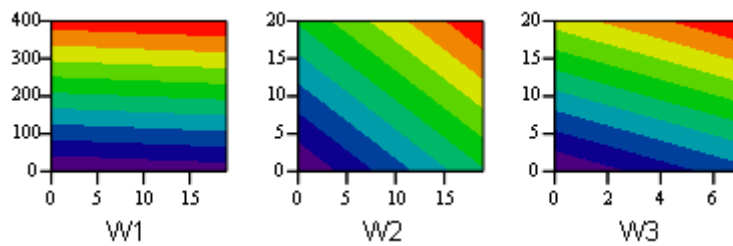


Рис.8.3. Карта начальных матриц весовых коэффициентов

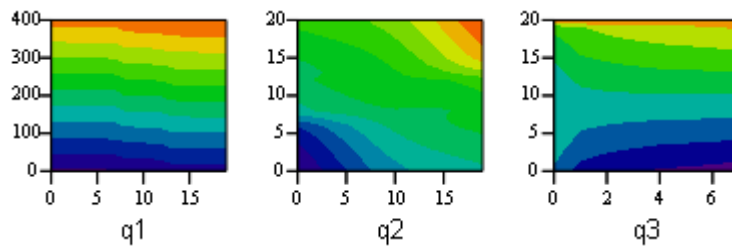


Рис.8.4. Карта матриц весовых коэффициентов после 100 шагов обучения

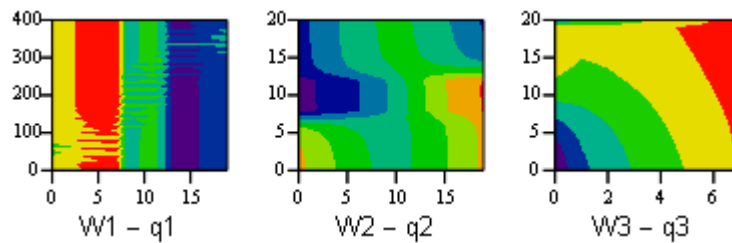


Рис.8.5. Карта разности матриц весовых коэффициентов до и после обучения

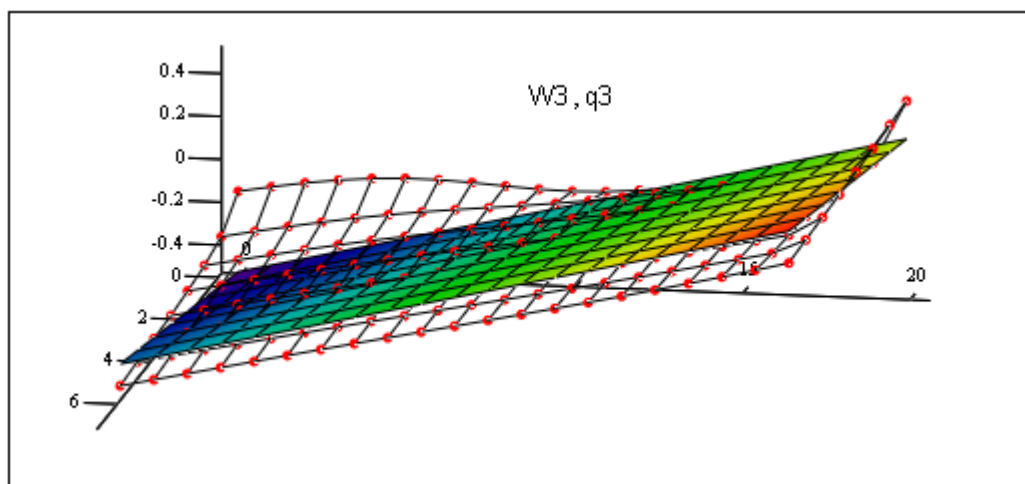


Рис.8.6. Трехмерное представление матрицы W3 до и после обучения НС.

Приведенные рисунки показывают, что в процессе обучения весовые коэффициенты преобразуются довольно согласованно во всех слоях НС. Однако, следует отметить, что системное задание весовых коэффициентов привело к фактической остановке процесса обучения примерно на сотом шаге при высоком уровне невязки. Отмеченный факт остается справедливым и для случайного задания элементов матриц весовых коэффициентов. Ниже приведен рисунок, показывающий результат трансформации весовых коэффициентов 3-го слоя НС, после 500 шагов обучения. Начальные значения матриц получены с помощью генератора случайных чисел, подчиненных равномерному закону распределения.

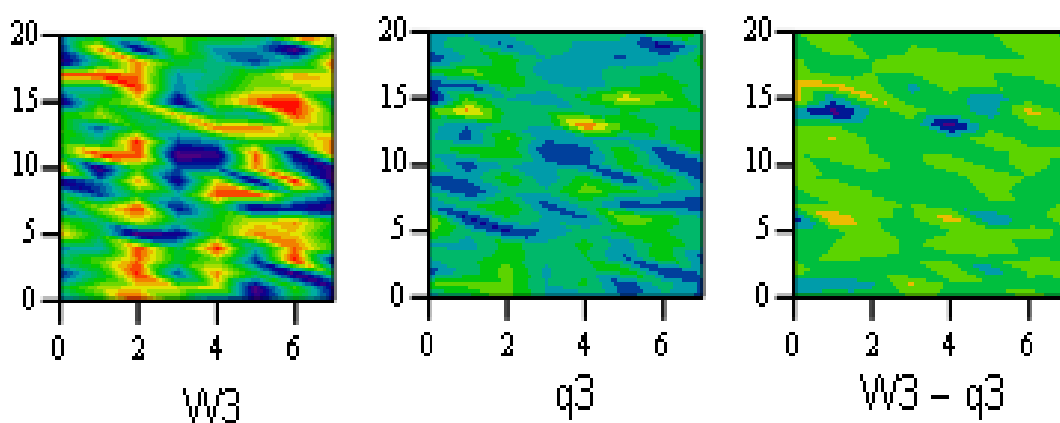


Рис.8.7. Трансформация весовых коэффициентов 3-го слоя НС, после 500 шагов обучения

НС реализует корреляционное сравнение входного и «весового» образов. Столбик матрицы весовых коэффициентов соответствует одному нейрону, который приспособливается к наиболее близкому в корреляционной мере входному образу. Такая интерпретация и является объяснением экспериментально выявленного факта согласованного изменения весовых коэффициентов.

8.5. Результаты обучения НС в идеальных условиях

Исследуется влияние параметров НС на процесс обучения измерительной НС. Рассматривается следующая группа параметров:

- количество нейронов в первом и втором слоях;
- количество тактов обучения;
- коэффициент скорости обучения;
- количество слоев.

Исследование проводится путем вариации перечисленных параметров в модели НС. На начальную стадию процесса обучения существенное влияние оказывает алгоритм инициализации матриц весовых коэффициентов, состав обучающей выборки и относительные размеры распознаваемого объекта. Однако, через 100-500 шагов обучения большинство реализаций выборки достаточно явно проявляют зависимость от указанных в начале подраздела параметров. В качестве меры качества обучения естественно использовать величину невязки выходного сигнала и эталонной информации:

$$sE = \sum_p \sum_i (y_{i,p} - U_{i,p})^2,$$

где y -вектор выходного сигнала НС, i - номер компоненты вектора y ,

p - номер эталона. Изменение этой величины не является абсолютно монотонным, что объясняется наличием множества точек перегиба и локальных экстремумов.

Увеличение количества нейронов в первом слое позволяет увеличить скорость обучения НС. Влияние этого параметра эффективно до уровня достаточной численности, т.е. до семикратного превышения распознаваемых и обучаемых ситуаций. Это подтверждает приведенный ниже пример процесса обучения для различного числа нейронов в первом слое НС. Исследование процесса обучения проводилось на модели трехслойной НС с

варьируемым числом нейронов в первом и втором слоях. Результаты моделирования приведены на рис.8.8.

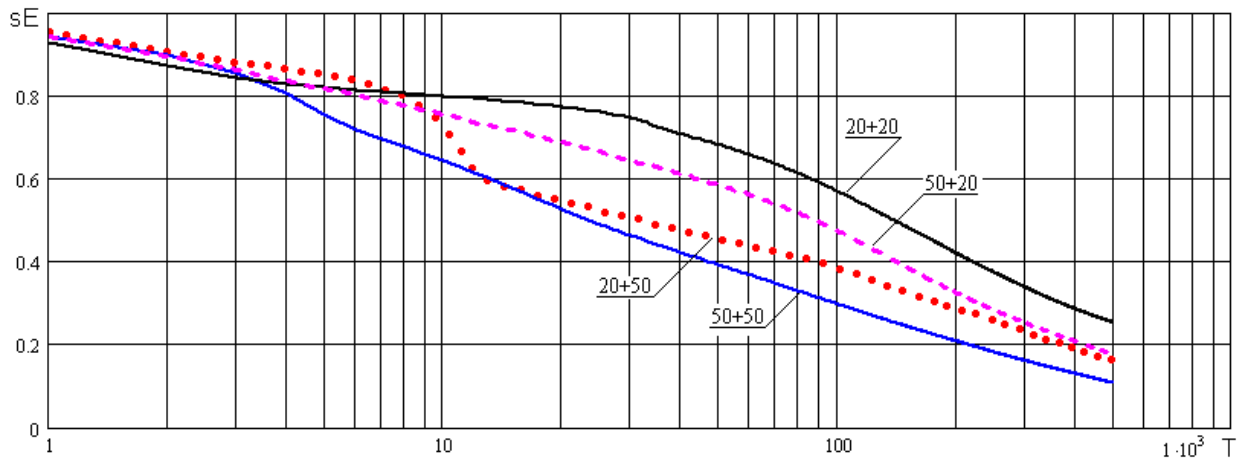


Рис.8.8. Влияние количества нейронов в первом и втором слоях НС на качество обучения

На рисунке четко видно, что после 500 шагов обучения НС, имеющая наибольшее число нейронов в обоих слоях (50+50), достигла максимального снижения невязки. НС с равночисленной конфигурацией (50+20) и (20+50) в первом и втором слоях нейронов имеют практически равные величины невязки, несмотря на существенные различия переходных процессов на первых шагах обучения. Невязка НС с конфигурацией (20+20) в 2.3 раза больше, чем для НС с конфигурацией (50+50). Таким образом, полученный результат показал, что величина невязки на установившемся участке обучения обратно пропорциональна интегральной численности НС.

Увеличение количества нейронов во втором слое несколько замедляет скорость обучения и приводит к снижению устойчивости процесса обучения. Это подтверждает следующий ниже рисунок, на котором явно видно монотонное изменение компоненты невязки в процессе обучения для НС с 20 нейронами во втором слое и отсутствие монотонности для НС с 50 нейронами в этом слое. Суммарная невязка изменяется монотонно, но компоненты невязки могут иметь колебательный характер. На рис.8.9

приведен график изменения одной из компонент невязки в процессе обучения.

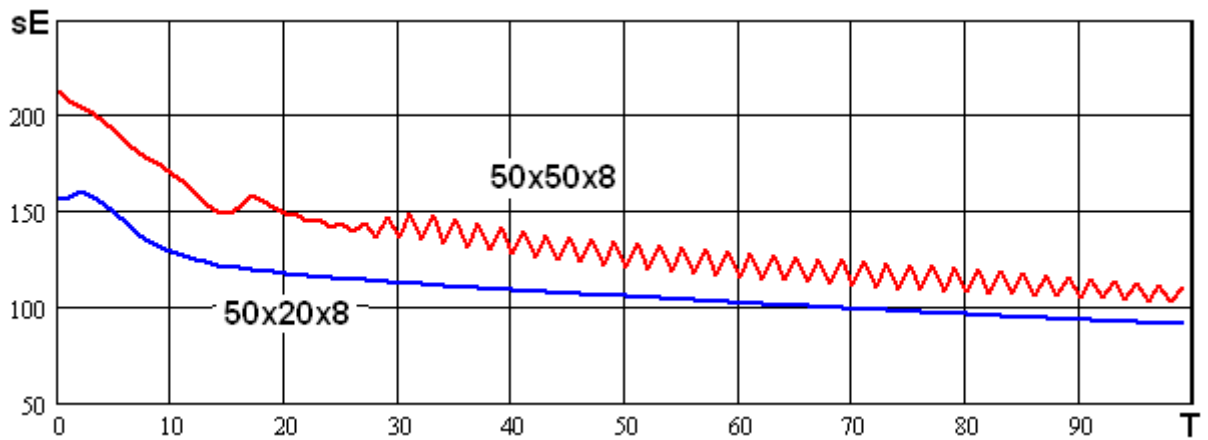


Рис.8.9. Влияние количества нейронов во втором слое НС на устойчивость обучения

Неустойчивость процесса обучения может проявляться периодически, что иллюстрирует приведенный ниже рисунок. На этом рисунке приведен пример периодического возникновения неустойчивости НС и влияния на это явление количества нейронов в первом слое.

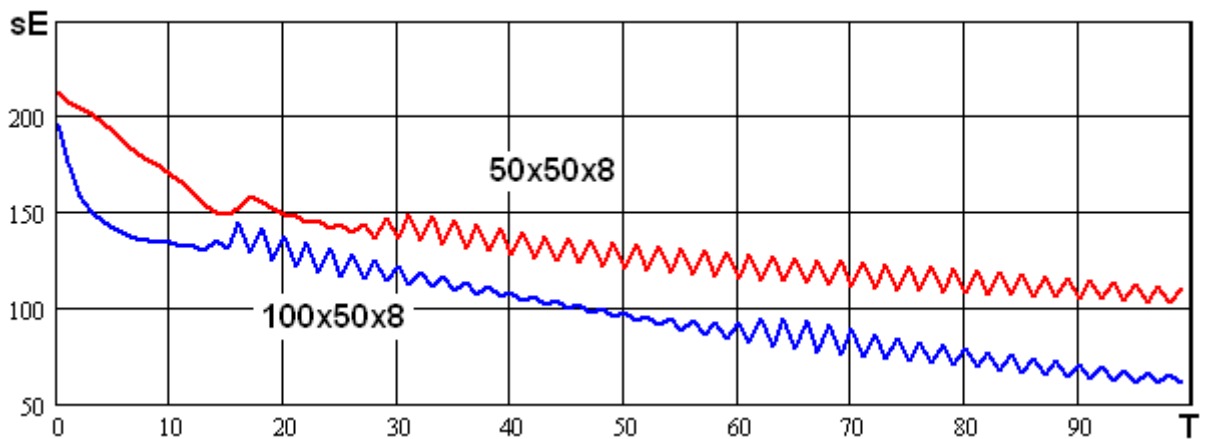


Рис.8.10. Периодическое проявление неустойчивости процесса обучения

Коэффициент скорости обучения влияет на устойчивость обучения. На рис.8.12 приведены три графика изменения невязки в процессе обучения для трех значений этого коэффициента.

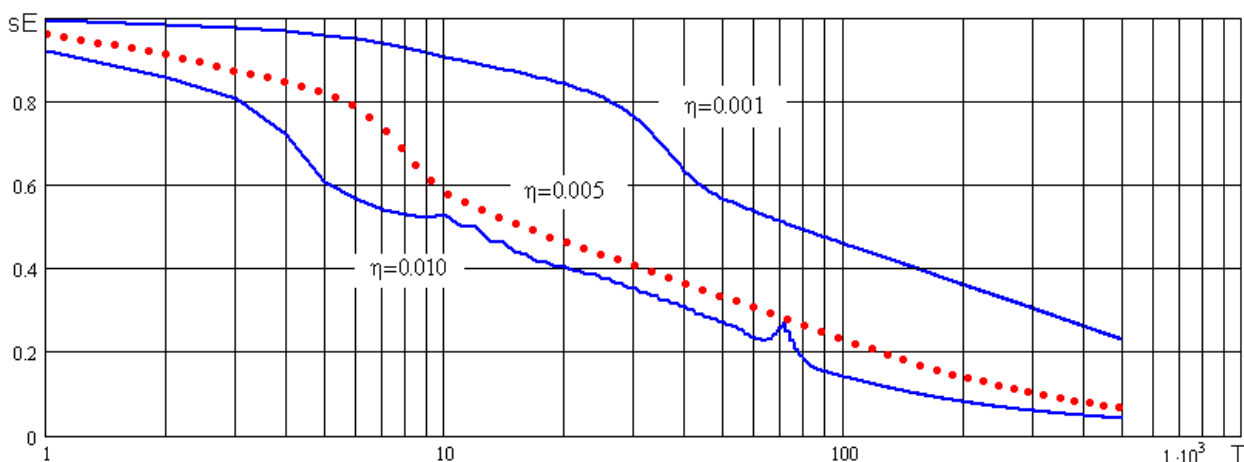


Рис.8.11. Пример влияния коэффициента скорости обучения на процесс обучения

Наиболее близким к оптимальному значению, судя по полученным графикам, следует считать $\eta = 0.005$, так как на графике для $\eta = 0.010$ видно несколько кратковременных срывов процесса обучения, а график для $\eta = 0.001$ соответствует медленному падению невязки.

8.6. Работа измерительной системы при наличии помех

Исследование влияния помех на точность измерительной системы осуществлялось путем предъявления на вход обученной НС зашумленного изображения с измеряемым объектом. Моделировалось три вида помех: точечные помехи, контурные помехи, помехи в виде сплошных ограниченных областей.

Считалось, что все помехи имеют одинаковую интенсивность. Модель помех предусматривала задание количества зашумленных точек и интенсивности помех. Реализация помехового сигнала представляла собой случайное изображение, образованное фоном нулевого уровня и множеством

точек. Точечные помехи генерировались как множество случайных координат, имеющих равномерное распределение. Контурные помехи создавались в виде тонких замкнутых линий. Помехи в виде сплошных ограниченных областей формировались в результате заливки внутренних областей случайных контуров.

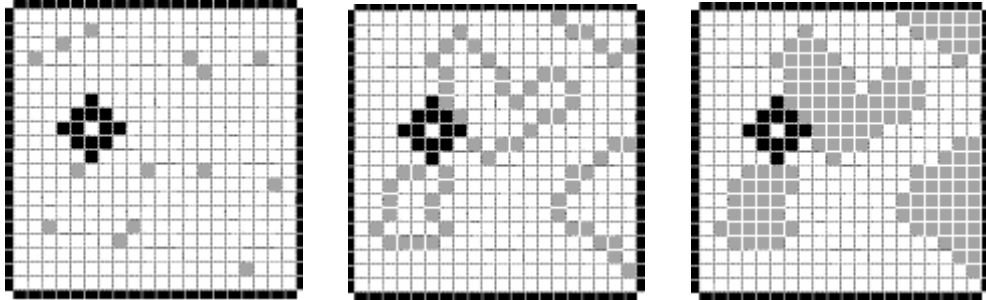


Рис.8.12. Примеры реализаций точечной, контурной и сплошной помех

В качестве меры влияния помех на качество работы НС выбран уровень невязки выходного сигнала НС после 3000 шагов обучения. Результаты моделирования приведены на рис.8.13.

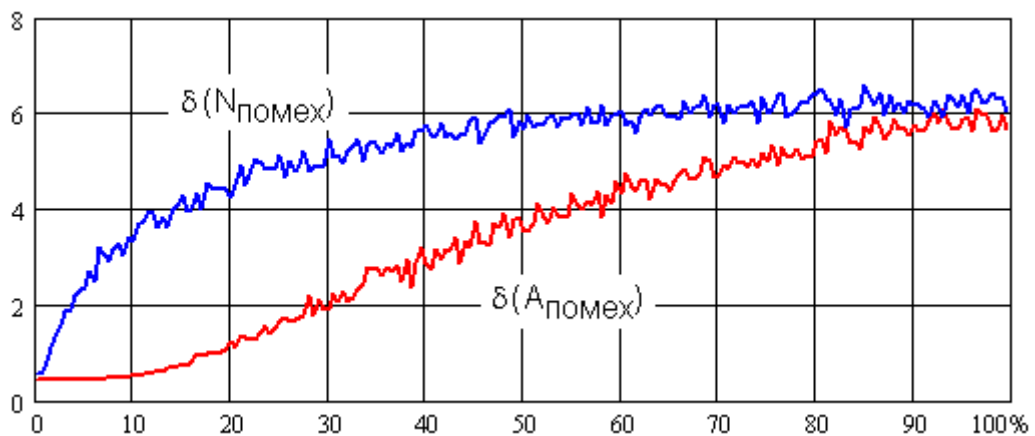


Рис.8.13. Влияние количества и интенсивности точечных помех на среднюю ошибку измерения

Эксперимент по определению характера влияния количества помех на среднюю ошибку измерения показал, что при постоянной амплитуде помехи ошибка существенно зависит от количества шумовых точек на начальном этапе их появления, а затем эта зависимость насыщается. На приведенном

графике видно, при зашумлении в 20% величина средней ошибки составляет 4 точки, а при дальнейшем росте числа зашумленных точек прирост погрешности составляет лишь 2 точки. Влияние амплитуды помехи становится заметным при уровне более 20%.

Выводы:

- НС могут успешно решать задачи измерения координат объектов по изображениям.
- Результат измерений может формироваться в виде двоичных кодов.
- Точность измерительных НС определяется количеством нейронов и качеством обучения.
- Наличие помеховых сигналов не приводит к потере устойчивости работы измерительной НС.

В качестве измеряемых объектов могут выступать движущиеся объекты, так как для НС представленного типа форма объекта не играет существенной роли.

Глава 8

ИЗМЕРЕНИЕ КООРДИНАТ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В данном разделе исследуется структура НС, которая формирует на своем выходе числовой параметр, соответствующий измерительной информации, отображающей положение некоторого объекта, имеющего заданную форму. Кроме того, рассматривается методика формирования требований к структуре и качеству обучения таких НС. В качестве входной информации рассматривается дискретное изображение, которое кроме изображения объекта, содержит изображение окружающей объект сцены. Считается, что постоянно лишь изображение объекта, а его положение и окружающая сцена могут меняться.

Известные типы НС [43,44] служат для решения задач распознавания и классификации различных объектов. Вектор выходного сигнала НС определяется видом активационной функции и представляет собой один из следующих возможных вариантов:

- вектор бинарных сигналов;
- вектор сигмоидальных или потенциальных сигналов;
- вектор ограниченно-линейных сигналов.

Компоненты этих векторов могут формировать относительно независимые сигналы или образовывать единую величину. Например, номер каждого выхода соответствует одному наперед заданному номеру эталона.

В данном разделе исследуется возможность использования НС в качестве измерительной системы, выходные сигналы которой образуют единый двоичный код измеряемой величины. Каждый отдельный выход такой НС отображает лишь один двоичный разряд измеряемой величины.

8.1. Структура измерительной системы, использующей НС

Измерительная система имеет следующие элементы:

- фотоприемное устройство, формирующее прямоугольную матрицу изображения сцены;
- нейронную сеть, имеющую заданное число слоев и количество нейронов в каждом слое;
- блок обучения;
- блок формирования результатов измерения.

Матрица входного изображения преобразуется в вектор входных сигналов НС. Если матрица имеет размер $m \times n$, то длина входного вектора равна $m \times n + 1$, так как добавляется еще одна компонента, предназначенная для инициирования коэффициентов смещения НС. Структура измерительной системы, использующей нейронную сеть, приведена на рис.8.1.

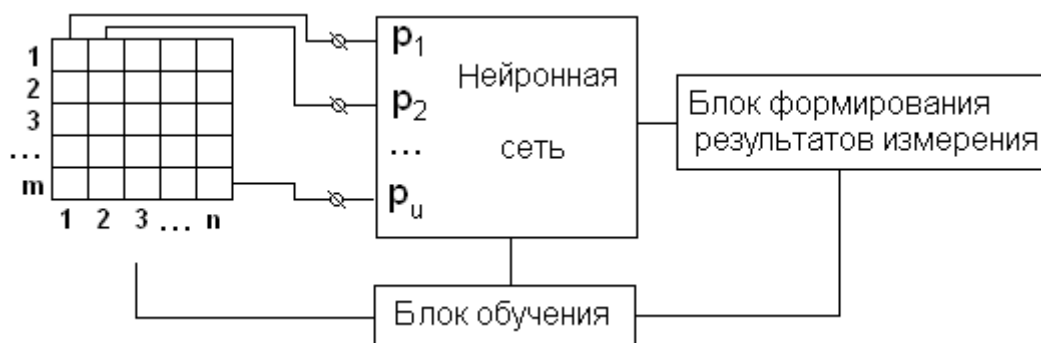


Рис.8.1. Структура измерительной системы, использующей нейронную сеть

Количество нейронов в каждом слое определяется сложностью решаемой задачи распознавания. Количество нейронов в последнем слое соответствует формату результата: так как НС измеряет две координаты, каждая из которых может принимать 2^{N_k} значений, то выходной слой должен иметь $2 \cdot N_k$ нейронов. В общем случае, количество нейронов выходного слоя равно:

$$N_k = \text{ceil}(\log_2(L_x/\delta x)) \cdot \text{ceil}(\log_2(L_y/\delta y)),$$

где $\text{ceil}(\cdot)$ - функция округления до целого значения в сторону увеличения, L_x, L_y - размеры изображения, $\delta x, \delta y$ - требуемая точность измерений.

Количество нейронов первых слоев НС должно быть в 7 раз больше, чем количество распознаваемых ситуаций. Это требование является гипотетическим и выдвинуто по аналогии с требованиями к НС Хопфилда и Хэмминга. В общем случае, это требование выражается следующей формулой:

$$N_1 = 7 \cdot \text{ceil}((L_x/\delta x) \cdot (L_y/\delta y)).$$

В случае рассматриваемого примера, это количество равно $7 \cdot 16 \cdot 16 = 1792$. Однако, это число можно уменьшить, считая, что НС имеет два независимых канала определения каждой координаты. В этом случае, количество нейронов составит $(16+16) \cdot 7 = 224$. Для такого подхода общая зависимость будет иметь вид:

$$N_1 = 7 \cdot ((L_x/\delta x) + (L_y/\delta y)).$$

Следует иметь в виду, что уменьшение количества нейронов в соответствии с последней формулой снизит достоверность измерений, поскольку вариация координаты смежного канала будет соответствовать помеховому сигналу.

Структура НС, формирующей на выходе координаты объекта в виде четырехразрядного бинарного кода, приведена на рис.8.2.

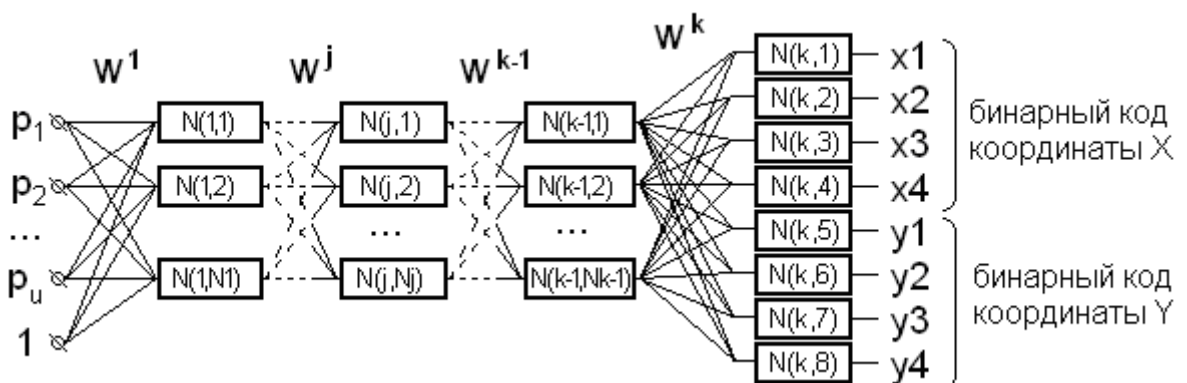


Рис.8.2. Структура НС, формирующей на выходе координаты объекта

Обозначение нейронов сети имеет следующий вид: $N(j,i)$, где i - номер нейрона в j -том слое, N_j - количество нейронов j -того слоя.

8.2. Формирование обучающей выборки

Обучающая выборка играет решающую роль в процессе обучения, так как только она может реализовать все потенциальные свойства НС, заложенные в структуре и алгоритме обучения НС. Каждый элемент обучающей выборки состоит из двух векторов: вектора элементов входного изображения и вектора соответствующего выходного сигнала. Другими словами, каждый элемент – это изображение сцены с измеряемым объектом в определенном положении и пара координат, соответствующих этому положению. Обучающая выборка обычно характеризуется следующими характеристиками: представительностью, точностью и достоверностью.

Объем и правило распределения элементов обучающей выборки в поле обзора измерительной системы определяют уровень ее представительности. Исходя из назначения НС, состоящего в определении координат объекта, обучающую выборку целесообразно формировать в виде сетки возможных положений объекта. Шаг этой сетки необходимо сопоставлять с размерами объекта и требуемой точностью измерений. Излишне мелкий шаг, очевидно, замедлит процесс обучения, крупный – снизит точность измерений.

НС способны решать интерполяционные задачи, поэтому шаг обучающей сетки может быть больше в несколько раз требуемой точности измерений. Однако, качество интерполяции, реализуемой НС, существенно зависит от алгоритма обучения. Справедливость данного допущения проверяют экспериментальным путем.

Достоверность обучающей выборки характеризуется уровнем помех в элементах выборки. Помехи в обучающем выходном векторе играют абсолютную деструктивную роль в процессе обучения. Помехи в обучающем

входном изображении могут играть положительную роль, если их уровень не слишком высок. Присутствие управляемого по интенсивности шума в обучающей выборке замедляет процесс обучения, но при этом усиливает интерполяционные свойства НС, то есть повышает устойчивость процесса обучения.

8.3. Алгоритм обучения нейронных сетей

Обучение нейронной сети осуществлялось методом обратного распространения ошибки. Данный метод хорошо изучен и достаточно устойчив. Он представляет собой градиентный метод поиска минимума функции, учитывающий слоистую структуру НС. Сигналы ошибки распространяются от выходов НС к ее входам, в направлении, обратном прямому распространению сигналов в обычном режиме работы. Согласно методу наименьших квадратов минимизируемой целевой функцией ошибки НС является сигнал ошибки обучения:

$$E(w) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j,p} (y_{j,p}^{(N)} - d_{j,p})^2,$$

где $y_{j,p}^{(N)}$ - реальное выходное состояние нейрона j выходного слоя N нейронной сети при подаче на ее входы p -го образа; $d_{j,p}$ - идеальное (желаемое) выходное состояние этого нейрона. Суммирование ведется по всем нейронам выходного слоя и по всем обрабатываемым сетью образам. Минимизация ведется методом градиентного спуска, что означает подстройку весовых коэффициентов следующим образом:

$$\Delta w_{ij}^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E}{\partial w_{ij}},$$

где $w_{ij}^{(n)}$ - весовой коэффициент синаптической связи; i - номер нейрона; j - номер входа нейрона; n - номер слоя; η - коэффициент скорости обучения, $0 < \eta < 1$. Производная сложной функции имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{ds_j} \cdot \frac{\partial s_j}{\partial w_{ij}},$$

где y_j - выход нейрона j ; s_j - взвешенная сумма входных сигналов, то есть аргумент активационной функции. Для производной сигнала ошибки по выходному сигналу имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{ds_k} \cdot \frac{\partial s_k}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{ds_k} \cdot w_{jk}^{(n+1)}.$$

Здесь суммирование по k выполняется среди нейронов слоя $n+1$.

Введя новую переменную

$$\delta_j^{(n)} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{ds_j},$$

получим рекурсивную формулу для расчетов величин $\delta_j^{(n)}$ слоя n из величин $\delta_k^{(n+1)}$ слоя $n+1$:

$$\delta_j^{(n)} = \left[\sum_k \delta_k^{(n+1)} \cdot w_{jk}^{(n+1)} \right] \cdot \frac{dy_j}{ds_j}.$$

Для выходного слоя:

$$\delta_i^{(N)} = (y_i^{(N)} - d_i) \cdot \frac{dy_i}{ds_i}.$$

Теперь можно записать основное выражение для весовых коэффициентов в обобщенном виде:

$$\Delta w_{ij}^{(n)} = -\eta \cdot \delta_j^{(n)} \cdot y_i^{(n-1)}$$

Рассмотренный метод обучения не всегда приводит к правильному решению, что обусловлено рядом причин. Во-первых, в процессе обучения может возникнуть ситуация, когда большие положительные или отрицательные значения весовых коэффициентов сместят рабочую точку на

сигмоидах многих нейронов в область насыщения. Малые величины производной от логистической функции приведут к остановке обучения, что парализует НС. Во-вторых, применение метода градиентного спуска не гарантирует, что будет найден глобальный, а не локальный минимум целевой функции. Эта проблема связана еще с одной, а именно - с выбором величины скорости обучения. Доказательство сходимости обучения в процессе обратного распространения основано на производных, то есть приращения весов и, следовательно, скорость обучения должна быть бесконечно малой, однако в этом случае обучение будет происходить неприемлемо медленно. С другой стороны, слишком большие коррекции весов могут привести к постоянной неустойчивости процесса обучения. Несмотря на указанные недостатки, рассмотренный метод считается одним из наиболее эффективных методов.

8.4. Влияние способа иницирования НС на процесс обучения

Иницирование весовых коэффициентов НС рекомендуется осуществлять множеством случайных чисел. Такой способ обосновывается тем, что если использовать нулевые начальные значения весовых коэффициентов, то НС будет «мертвой», то есть она не будет реагировать на входные сигналы. Интересный результат получается при регулярном ненулевом иницировании.

Карта матрицы весовых коэффициентов – это отображение матрицы в виде изображения, яркость или цвет элементов которого пропорциональны величине элементов матрицы. С целью наглядности трансформации весовых коэффициентов начальные значения матриц были взяты не случайными, а заданы с помощью следующей функции:

$$W_{i,j} = \frac{i+j}{ik+jk} \cdot 2^{-1},$$

где $i=1..ik, j=1..jk$. Такая зависимость обеспечивает монотонный рост элементов матрицы по мере роста номеров строк и столбцов в пределах от -1 до +1. Примеры таких карт приведены на нижеследующих рисунках.

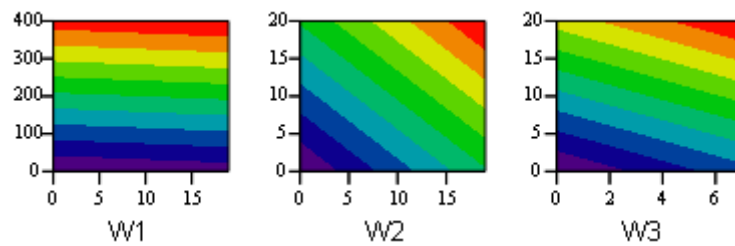


Рис.8.3. Карта начальных матриц весовых коэффициентов

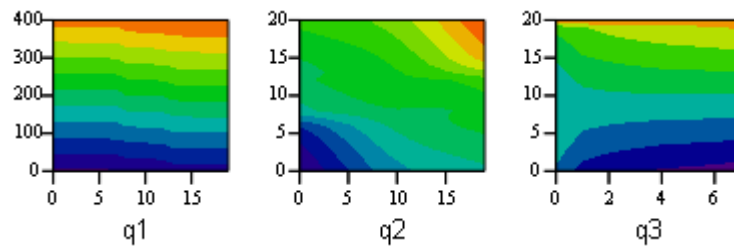


Рис.8.4. Карта матриц весовых коэффициентов после 100 шагов обучения

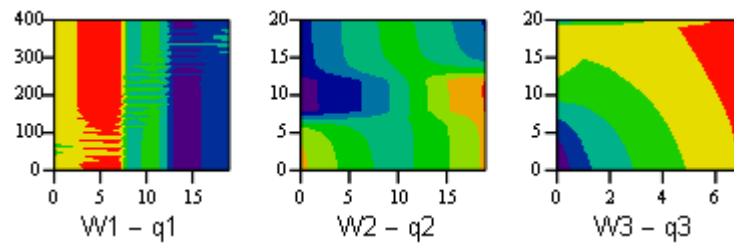


Рис.8.5. Карта разности матриц весовых коэффициентов до и после обучения

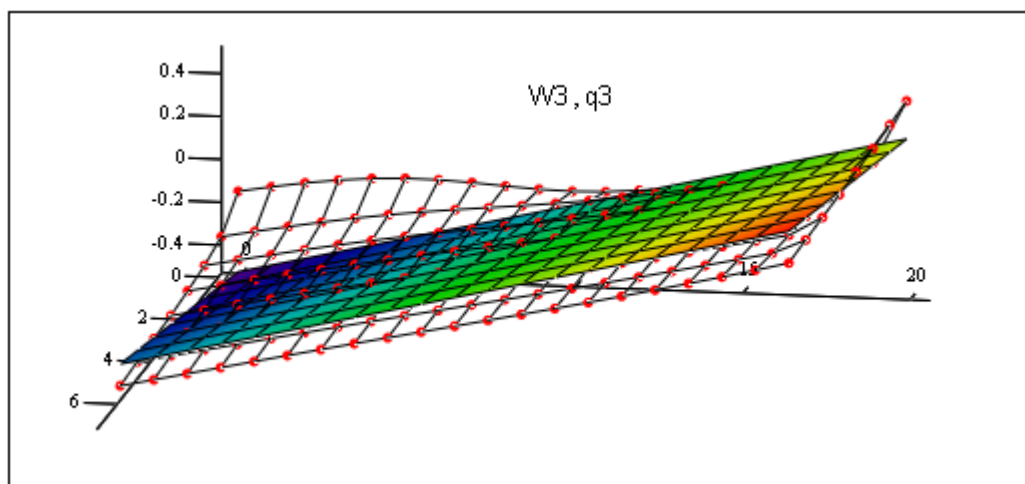


Рис.8.6. Трехмерное представление матрицы W3 до и после обучения НС.

Приведенные рисунки показывают, что в процессе обучения весовые коэффициенты преобразуются довольно согласованно во всех слоях НС. Однако, следует отметить, что системное задание весовых коэффициентов привело к фактической остановке процесса обучения примерно на сотом шаге при высоком уровне невязки. Отмеченный факт остается справедливым и для случайного задания элементов матриц весовых коэффициентов. Ниже приведен рисунок, показывающий результат трансформации весовых коэффициентов 3-го слоя НС, после 500 шагов обучения. Начальные значения матриц получены с помощью генератора случайных чисел, подчиненных равномерному закону распределения.

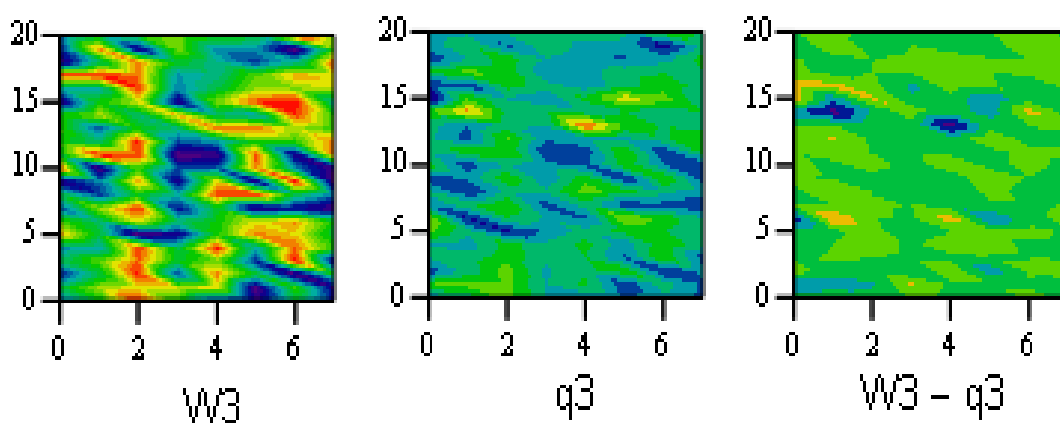


Рис.8.7. Трансформация весовых коэффициентов 3-го слоя НС, после 500 шагов обучения

НС реализует корреляционное сравнение входного и «весового» образов. Столбик матрицы весовых коэффициентов соответствует одному нейрону, который приспособливается к наиболее близкому в корреляционной мере входному образу. Такая интерпретация и является объяснением экспериментально выявленного факта согласованного изменения весовых коэффициентов.

8.5. Результаты обучения НС в идеальных условиях

Исследуется влияние параметров НС на процесс обучения измерительной НС. Рассматривается следующая группа параметров:

- количество нейронов в первом и втором слоях;
- количество тактов обучения;
- коэффициент скорости обучения;
- количество слоев.

Исследование проводится путем вариации перечисленных параметров в модели НС. На начальную стадию процесса обучения существенное влияние оказывает алгоритм инициализации матриц весовых коэффициентов, состав обучающей выборки и относительные размеры распознаваемого объекта. Однако, через 100-500 шагов обучения большинство реализаций выборки достаточно явно проявляют зависимость от указанных в начале подраздела параметров. В качестве меры качества обучения естественно использовать величину невязки выходного сигнала и эталонной информации:

$$sE = \sum_p \sum_i (y_{i,p} - U_{i,p})^2,$$

где y -вектор выходного сигнала НС, i - номер компоненты вектора y , p - номер эталона. Изменение этой величины не является абсолютно монотонным, что объясняется наличием множества точек перегиба и локальных экстремумов.

Увеличение количества нейронов в первом слое позволяет увеличить скорость обучения НС. Влияние этого параметра эффективно до уровня достаточной численности, т.е. до семикратного превышения распознаваемых и обучаемых ситуаций. Это подтверждает приведенный ниже пример процесса обучения для различного числа нейронов в первом слое НС. Исследование процесса обучения проводилось на модели трехслойной НС с

варьируемым числом нейронов в первом и втором слоях. Результаты моделирования приведены на рис.8.8.

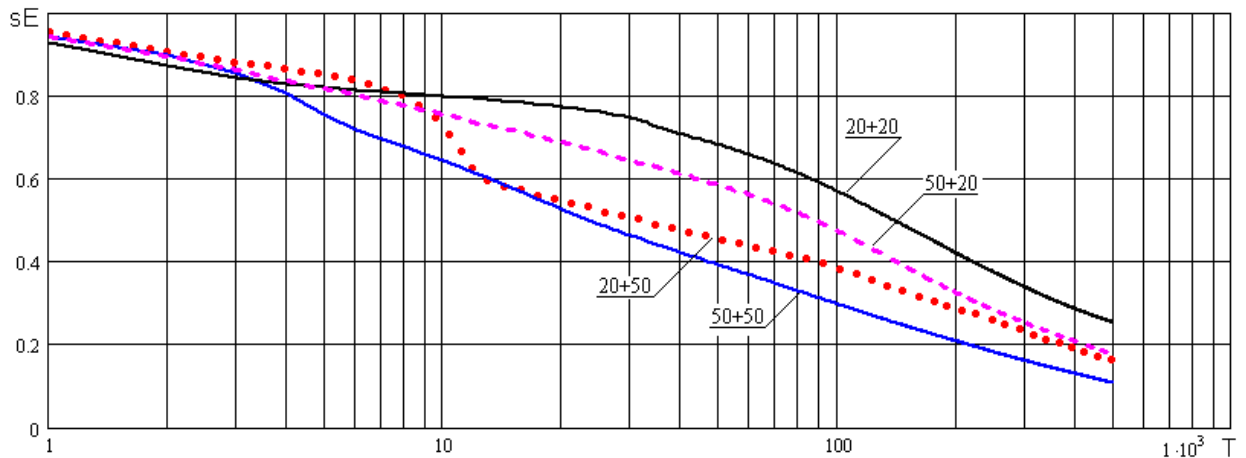


Рис.8.8. Влияние количества нейронов в первом и втором слоях НС на качество обучения

На рисунке четко видно, что после 500 шагов обучения НС, имеющая наибольшее число нейронов в обоих слоях (50+50), достигла максимального снижения невязки. НС с равночисленной конфигурацией (50+20) и (20+50) в первом и втором слоях нейронов имеют практически равные величины невязки, несмотря на существенные различия переходных процессов на первых шагах обучения. Невязка НС с конфигурацией (20+20) в 2.3 раза больше, чем для НС с конфигурацией (50+50). Таким образом, полученный результат показал, что величина невязки на установившемся участке обучения обратно пропорциональна интегральной численности НС.

Увеличение количества нейронов во втором слое несколько замедляет скорость обучения и приводит к снижению устойчивости процесса обучения. Это подтверждает следующий ниже рисунок, на котором явно видно монотонное изменение компоненты невязки в процессе обучения для НС с 20 нейронами во втором слое и отсутствие монотонности для НС с 50 нейронами в этом слое. Суммарная невязка изменяется монотонно, но компоненты невязки могут иметь колебательный характер. На рис.8.9

приведен график изменения одной из компонент невязки в процессе обучения.

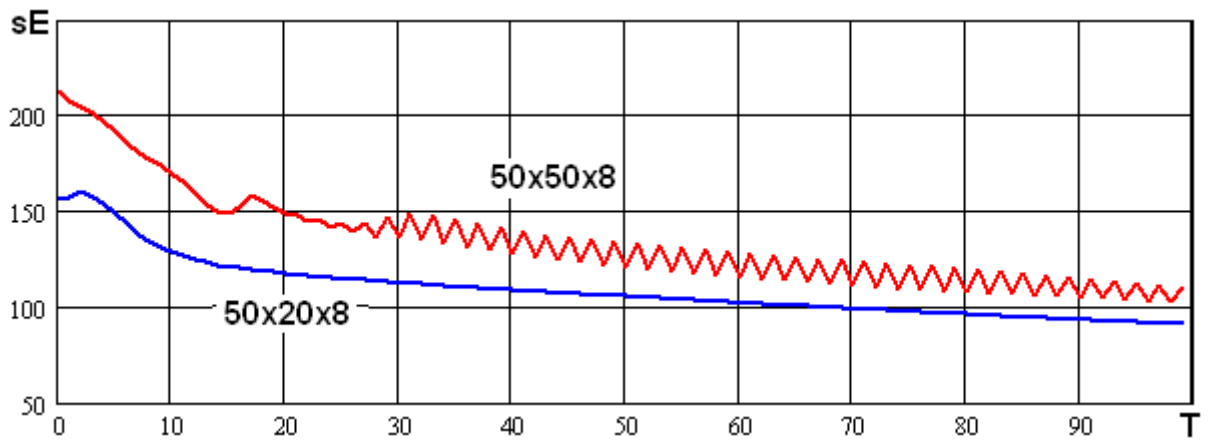


Рис.8.9. Влияние количества нейронов во втором слое НС на устойчивость обучения

Неустойчивость процесса обучения может проявляться периодически, что иллюстрирует приведенный ниже рисунок. На этом рисунке приведен пример периодического возникновения неустойчивости НС и влияния на это явление количества нейронов в первом слое.

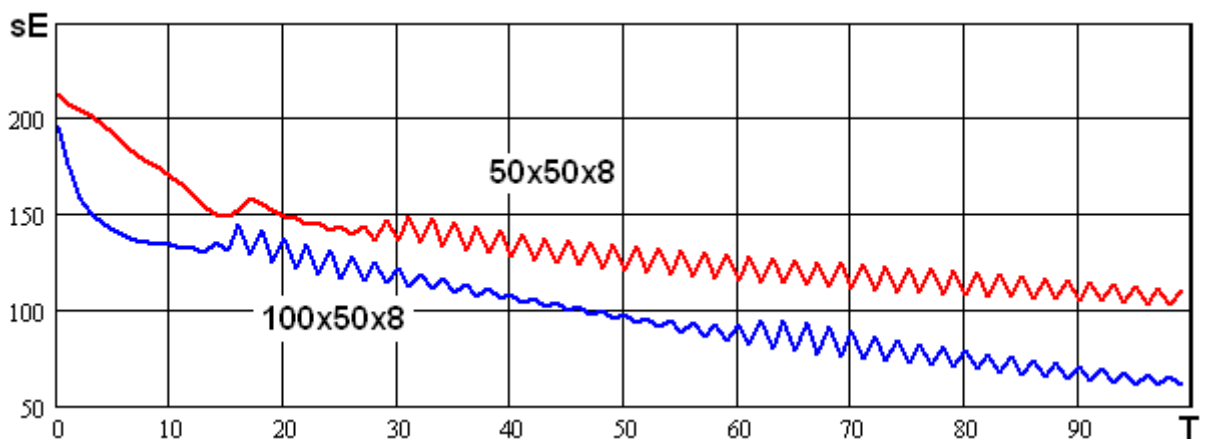


Рис.8.10. Периодическое проявление неустойчивости процесса обучения

Коэффициент скорости обучения влияет на устойчивость обучения. На рис.8.12 приведены три графика изменения невязки в процессе обучения для трех значений этого коэффициента.

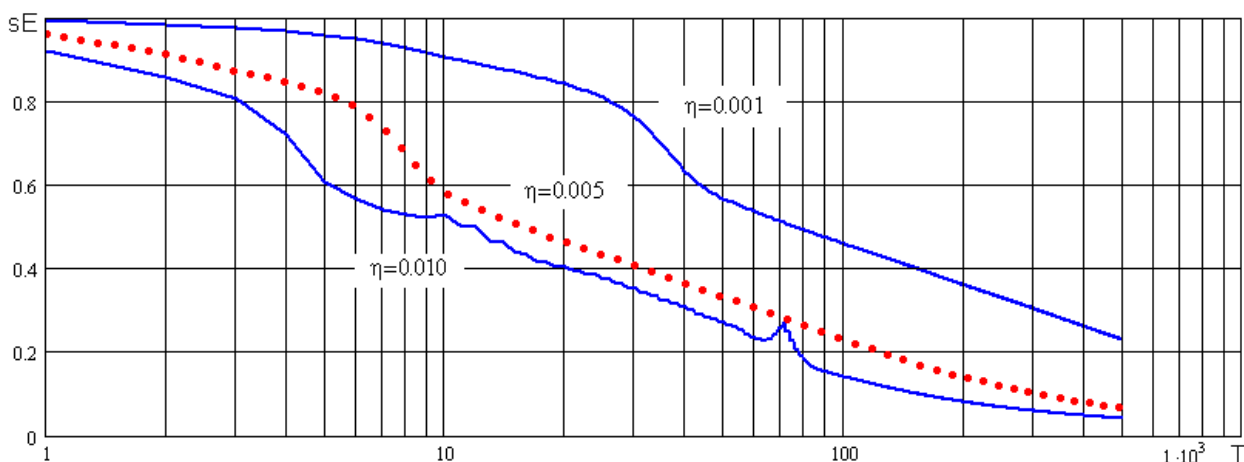


Рис.8.11. Пример влияния коэффициента скорости обучения на процесс обучения

Наиболее близким к оптимальному значению, судя по полученным графикам, следует считать $\eta = 0.005$, так как на графике для $\eta = 0.010$ видно несколько кратковременных срывов процесса обучения, а график для $\eta = 0.001$ соответствует медленному падению невязки.

8.6. Работа измерительной системы при наличии помех

Исследование влияния помех на точность измерительной системы осуществлялось путем предъявления на вход обученной НС зашумленного изображения с измеряемым объектом. Моделировалось три вида помех: точечные помехи, контурные помехи, помехи в виде сплошных ограниченных областей.

Считалось, что все помехи имеют одинаковую интенсивность. Модель помех предусматривала задание количества зашумленных точек и интенсивности помех. Реализация помехового сигнала представляла собой случайное изображение, образованное фоном нулевого уровня и множеством

точек. Точечные помехи генерировались как множество случайных координат, имеющих равномерное распределение. Контурные помехи создавались в виде тонких замкнутых линий. Помехи в виде сплошных ограниченных областей формировались в результате заливки внутренних областей случайных контуров.

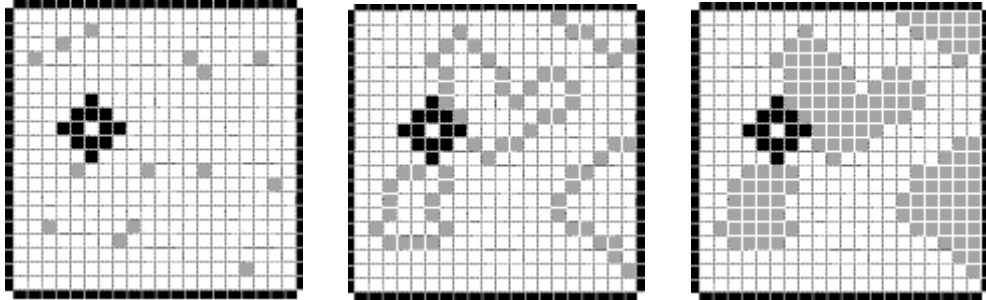


Рис.8.12. Примеры реализаций точечной, контурной и сплошной помех

В качестве меры влияния помех на качество работы НС выбран уровень невязки выходного сигнала НС после 3000 шагов обучения. Результаты моделирования приведены на рис.8.13.

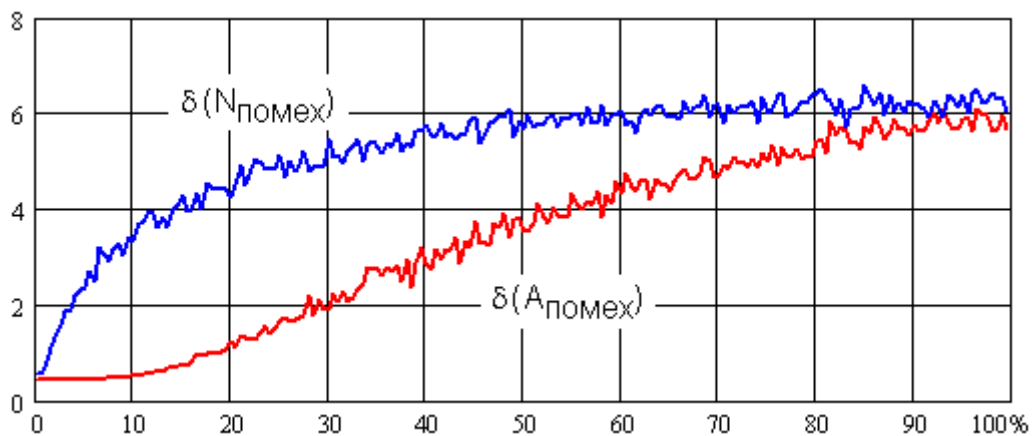


Рис.8.13. Влияние количества и интенсивности точечных помех на среднюю ошибку измерения

Эксперимент по определению характера влияния количества помех на среднюю ошибку измерения показал, что при постоянной амплитуде помехи ошибка существенно зависит от количества шумовых точек на начальном этапе их появления, а затем эта зависимость насыщается. На приведенном

графике видно, при зашумлении в 20% величина средней ошибки составляет 4 точки, а при дальнейшем росте числа зашумленных точек прирост погрешности составляет лишь 2 точки. Влияние амплитуды помехи становится заметным при уровне более 20%.

Выводы:

- НС могут успешно решать задачи измерения координат объектов по изображениям.
- Результат измерений может формироваться в виде двоичных кодов.
- Точность измерительных НС определяется количеством нейронов и качеством обучения.
- Наличие помеховых сигналов не приводит к потере устойчивости работы измерительной НС.

В качестве измеряемых объектов могут выступать движущиеся объекты, так как для НС представленного типа форма объекта не играет существенной роли.