

Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики"
(СибГУТИ)

А.Д. Бялик
А.Е. Гайвоненко

Методические указания по выполнению
лабораторно-практических работ дисциплины
"Датчики и сенсорная электроника"
по направлению 11.03.04 - "Электроника и наноэлектроника"
Профиль - "Интегральная электроника и наноэлектроника"

НОВОСИБИРСК
2008

Содержание

Расчёт напряжения и деформации в микромеханических системах	
1. Основные типы упругих элементов	3
2. Тензор механических напряжений	8
3. Тензор деформаций	13
4. Закон Гука для анизотропных упругих элементов	17
5. Важнейшие уравнения теории упругости	24
5.1. Уравнение движения	24
5.2. Уравнения неразрывности деформаций	26
6. Энергия деформированного твердого тела	26
7. Механические напряжения и деформации в упругом элементе балочного типа.....	29
8. Изгиб тонких пластинок	32
Литература	37



РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В данной главе рассматривается математическое описание механических напряжений и деформаций в компонентах микросистем. Вначале вводятся основные понятия, касающиеся тензоров напряжений и деформаций, а также потенциальной энергии деформированного твердого тела. Во второй части главы приведены основные уравнения теории упругости и в качестве простейшего примера рассмотрен изгиб балок.

При написании формул в этой главе будет широко применяться правило «суммирования по повторяющемуся индексу», введенное А. Эйнштейном:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \equiv x_i y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это правило делает запись различных соотношений менее громоздкой, а формулы выглядят более компактными.

Подробный вывод ряда формул в этой главе достаточно громоздкий, поэтому в тексте намечен путь вычислений и приведены конечные результаты, что важно для понимания и практического использования. Промежуточные вычисления читатель при желании может сделать самостоятельно.

1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В состав микросистем входят упругие элементы (УЭ), в которых внешние воздействия различного рода приводят к деформации и изменению их потенциальной энергии. Далее эти изменения в

микросистемах могут использоваться различным образом. К настоящему времени имеется несколько основных типов упругих элементов, которые получили широкое практическое применение. Применимость того или иного типа упругих элементов в значительной мере определяется технологией их изготовления и соответствием основным идеям технологии микросистемной техники.

Упругие элементы балочного типа. Упругие элементы этого типа обычно представляют собой прямоугольную кремниевую балочку, жесткозащемленную с одной стороны (рис. 1.1). На балочку может действовать сосредоточенная или распределенная нагрузка, под действием которой балочка изгибается. Деформация кристаллической решетки может использоваться для управления, например, сопротивлением тензорезисторов или положением в пространстве иглы туннельного микроскопа.

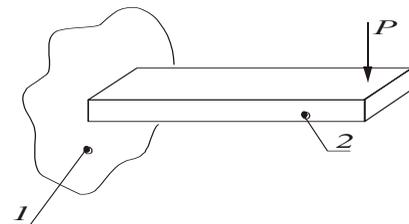


Рис.1.1. Консольно-защемленный упругий элемент балочного типа:
1 – область защемления, 2 – упругий элемент

Вопрос о способе реализации жесткого защемления очень важный. В первоначальных работах защемление пытались реализовать с помощью приклеивания балочки к металлическому основанию. Из-за большой диссипации энергии в месте защемления и малой надежности клеевого соединения от такого способа защемления быстро отказались.

Сейчас жесткое защемление реализуется в рамках технологии микропрофилирования, причем балочка и область защемления представляют собой единое целое (единый монокристалл). Для обеспечения жесткого защемления можно также применять методы прямого сращивания кремния и анодную посадку.

Упругие элементы можно классифицировать: а) по форме балочки в плане и по профилю; б) по способу нагружения: точечный, равномерный, неравномерный (рис. 1.2).

Конструктивная реализация этих способов нагружения может быть весьма разнообразной. Например, точечную нагрузку можно реализовать через воздействие штока весоизмерительного устройства. Распределенная нагрузка может быть вызвана силами инерции или взаимодействием упругого элемента с набегающим потоком газа.

Особый интерес представляют конструктивные реализации способов нагружения в виде тонких пленок проводящего слоя металла

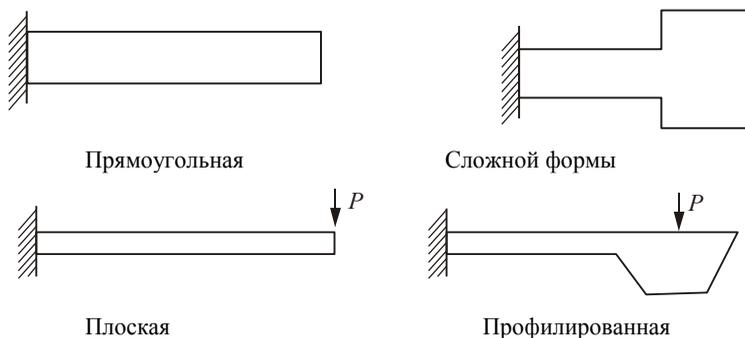


Рис. 1.2. Варианты форм и профилей упругих элементов балочного типа

или магнетика, нанесенных на поверхность балочки и взаимодействующих с электро- или магнитостатическим полем. В последнее время для управления упругими элементами микросистемной техники все более широкое применение находят тонкие пьезоэлектрические слои или слои другого материала, отличающиеся по коэффициенту линейного расширения от кремния (биморфные слои) [1].

Упругие элементы балочного типа с консольным защемлением нашли широкое применение в акселерометрах и разнообразных актуаторах.

Двухопорные упругие элементы балочного типа. Балочные элементы могут иметь и две области защемления. Схема нагружения таких элементов приведена на рис.1.3. Нагружение таких балок проще всего реализовать за счет действия электростатических сил. Такого рода упругие элементы могут применяться в световых модуляторах, электрических выключателях или клапанах [2].

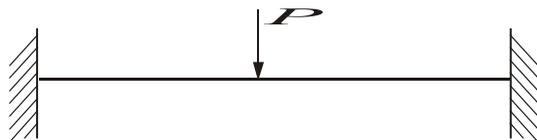


Рис. 1.3. Схема нагружения упругого элемента с двумя областями защемления

Упругие элементы мембранного типа. Упругие элементы данного типа представляют собой тонкую монокристаллическую пластинку, жесткозащемленную по контуру. Наименование «мембранный» отражает тот факт, что толщина упругого элемента много меньше двух других его размеров и, на наш взгляд, является не-

удачным. В теории упругости мембранами называют тонкие пластинки с пренебрежимо малой изгибной жесткостью [3]. В реальных упругих элементах изгибные жесткости, как будет видно из дальнейшего, играют определяющую роль. В данной книге, учитывая широкую распространенность, мы будем пользоваться термином «мембрана», имея в виду сделанное выше замечание.

Так же, как и балочные, упругие элементы мембранного типа можно классифицировать: а) по форме – круглые, квадратные, прямоугольные, треугольные, многоугольные и сложные формы; б) по профилю сечения – плоские, профилированные с одним жестким центром или с несколькими жесткими центрами (рис. 1.4). В настоящее время чаще всего применяются квадратные мембраны.

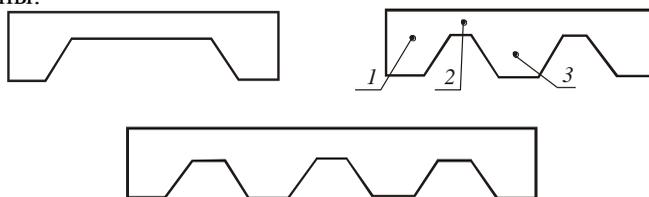


Рис. 1.4. Виды упругих элементов мембранного типа:

1 – кольцо жесткости, 2 – мембрана, 3 – жесткий центр

В упругих элементах мембранного типа качество заземления играет даже более важную роль, чем в балочных. Во всех современных конструкциях упругих элементов мембрана и кольцо жесткости составляют либо единое целое (монокристалл), либо два монокристалла, соединенных методом прямого сращивания. Появление, наряду с плоскими упругими элементами, элементов с жесткими центрами связано с попытками улучшить метрологические характеристики компонентов микросистемной техники. Наибольшее применение упругие элементы мембранного типа находят в сенсорах давления и в качестве подвижных диафрагм микронасосов и микроинжекторов.

В подавляющем большинстве случаев нагрузка на мембрану распределяется по ее площади равномерно. В подвижных элементах актюаторов распределение нагрузки обычно имеет ярко выраженный неравномерный характер.

Торсионные зеркала. Торсионные зеркала представляют собой тонкую кремниевую пластинку, прикрепленную с помощью тонких полосок (торсионов) к рамке-основанию. Вся конструкция – это единый монокристалл кремния (рис. 1.5).

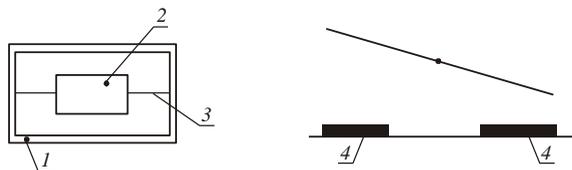


Рис. 1.5. Схема торсионного зеркала:

1 – рамка-основание, 2 – микрозеркало, 3 – торсионные подвески, 4 – управляющие электроды

Электрическое поле, для которого микрозеркало является одной из обкладок конденсатора, заставляет зеркало поворачиваться на угол, зависящий от величины поля и жесткости торсионных нитей. Упругая энергия, запасенная в конструкции при повороте, возвращает зеркало в исходное состояние при снятии управляющего напряжения.

Торсионные зеркала в настоящее время широко применяются в разнообразных модуляторах света [4].

Упругие элементы гребенчатого типа. Эти упругие элементы представляют собой систему двух гребенчатых электродов, отделенных друг от друга небольшим воздушным зазором. Один из электродов неподвижен, а другой может перемещаться, так что расстояние между электродами может изменяться при возникновении электростатического взаимодействия (рис. 1.6).

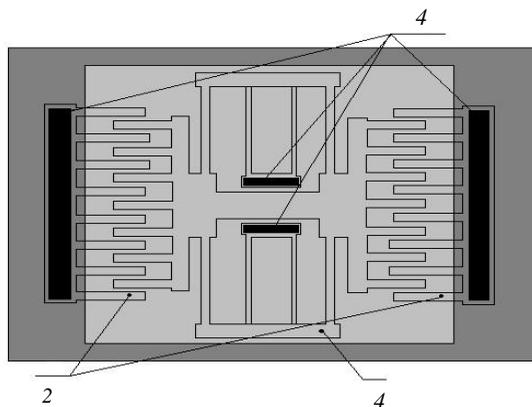


Рис. 1.6. Упругий элемент гребенчатого типа:

1 – области закрепления гребенчатых структур, 2 – неподвижные электроды, 3 – подвижные электроды

При перемещении подвижного электрода происходит изменение его упругой потенциальной энергии, которая возвращает подвижный электрод в равновесное состояние при прекращении электростатического взаимодействия.

Упругие элементы такого типа находят применение в акселерометрах, оптических ключах и специальных микромеханизмах [5].

2. ТЕНЗОР МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Если на упругий элемент сенсора или актюатора действует внешняя сила, например измеряемое механическое воздействие, то упругий элемент находится в напряженном состоянии. При этом любая часть элемента действует на соседнюю с некоторой силой. Любой объем твердого тела, находящийся в напряженном состоянии, в общем случае испытывает влияние сил двух типов: 1) объемных сил, действующих на все части упругого элемента, таких как силы инерции или сила тяжести, величина которых пропорциональна объему элемента; 2) сил, действующих через поверхность любого элементарного объема упругого элемента со стороны окружающих частей. Такие силы пропорциональны площади поверхности. Величина силы, отнесенная к единице площади, именуется напряжением.

Пусть в теле упругого элемента выделена малая площадку δS и ее ориентация в пространстве задается с помощью вектора внешней нормали $\vec{l} = l_1 l_2 l_3$. Равнодействующую сил на площадке δS обозначим \vec{F} , тогда отношение $\vec{F} / \delta S = \vec{T}$ дает вектор механических напряжений, действующих на эту площадку (рис. 1.7).

В пределе, при $\delta S \rightarrow 0$, вектор напряжений описывает силовое воздействие в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ твердого тела. При этом величина векторов напряжений зависит от ориентации в пространстве площадки δS , которую можно выбирать произвольным способом, но так, чтобы всегда включалась точка M . Для однозначного описания напряженного состояния твердого тела оказалось целесообразно пользоваться набором

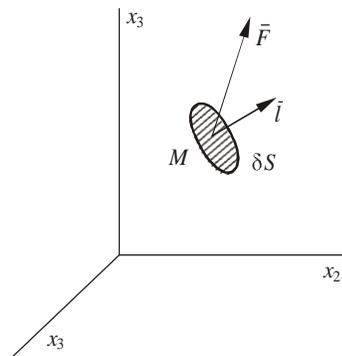


Рис. 1.7. Ориентация векторов силы и нормали на площадке δS

из девяти коэффициентов линейного преобразования, связывающего декартовы компоненты вектора напряжения $\vec{T} T_1 T_2 T_3$ и вектора нормали $\vec{l} l_1 l_2 l_3$ к площадке δS в точке M :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{11}l_1 + T_{12}l_2 + T_{13}l_3, \\ T_2 &= T_{21}l_1 + T_{22}l_2 + T_{23}l_3, \\ T_3 &= T_{31}l_1 + T_{32}l_2 + T_{33}l_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Набор чисел T_{ik} , $i, k = 1, 2, 3$, образует тензор второго ранга, именуемый тензором механических напряжений. По определению [6] тензор второго ранга описывает физическую величину в некоторой системе координат 3^2 числами (компонентами T_{ij}), которые при преобразовании координат (повороте) изменяются согласно уравнениям

$$T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}, \quad (2.2)$$

где $[\alpha]$ – матрица направляющих косинусов, связывающих «старую» x_1, x_2, x_3 и «новую» системы координат x'_1, x'_2, x'_3 . Эта матрица строится по правилу

$$\begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{array} & \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \end{array}, \quad (2.3)$$

где $\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ и т.д.

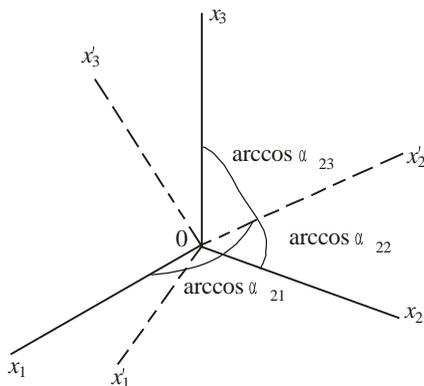


Рис. 1.8. Системы координат матрицы (2.3)

Матрица направляющих косинусов обладает несколькими важными свойствами, позволяющими контролировать правильность ее составления:

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Величина, стоящая в правой части формулы (2.4), – дельта-символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

Транспонированная матрица направляющих косинусов является одновременно и обратной по отношению к исходной, что приводит к равенству:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Физический смысл компонент T_{ij} очевиден из рис. 1.9, где представлены силы, действующие на грани единичного куба в однородно напряженном теле. Через каждую грань будет передаваться сила, действующая со стороны внешних частей тела на внутреннюю область куба.

Силу, приложенную к каждой грани, можно разложить на три компоненты. Тогда T_{ij} означает i -ю компоненту, действующую в направлении оси ox_i на грань куба, перпендикулярную к ox_j .

Диагональные компоненты T_{11} , T_{22} , T_{33} именовются также нормальными компонентами и описывают напряжения растяжения или сжатия на площадях, перпендикулярных к осям (x_1, x_2, x_3) . Нondiagonalные компоненты $i \neq j$ описывают сдвиговые механические напряжения, когда сила действует касательно плоскости соответ-

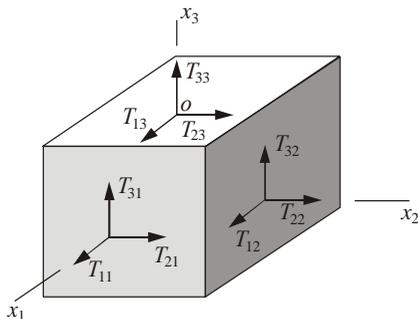


Рис. 1.9. Силы, действующие на грани единичного куба в однородно напряженном теле

ствующей площадки. Сдвиговые напряжения стремятся исказить форму единичного куба.

В условиях статического равновесия, когда куб не вращается, момент сил, приложенных к нему, должен быть равным нулю. Это приводит к равенству

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad i \neq j, \quad (2.6)$$

т. е. тензор механических напряжений является симметричным. Строго говоря, условие (2.6) выполняется, когда нет моментов от объемных сил [6], возникающих в присутствии электрических или магнитных полей.

Если в пределах упругого элемента компоненты тензора напряжений не зависят от координаты, то напряженное состояние однородное. В случае наличия такой зависимости напряженное состояние неоднородное.

Компоненты тензора напряжений, как следует из его определения, зависят от выбора системы координат. Всегда можно выбрать такую систему, в которой тензор получит диагональный вид

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{vmatrix}.$$

Оси координат, в которых тензор приобретает диагональную форму, именуется главными. Для однородного напряженного состояния направления главных осей одинаковы по всему упругому элементу, для неоднородного напряженного состояния направления главных осей меняются от точки к точке. В зависимости от структуры тензора в главных осях различают несколько важных случаев напряженного состояния упругих элементов.

Одноосное напряжение:

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Плоское напряженное состояние

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Гидростатическое сжатие

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

При написании последнего тензора учтено, что положительный знак напряжений соответствует растяжению.

Плоский сдвиг

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Поворотом главных осей на 45° тензор напряжений приводится к диагональной форме.

Симметрия тензора напряжений позволяет ввести матрицу напряжений, которая содержит шесть компонент:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и соответствующей матрицы особенно проста:

$$\begin{aligned} T_{11} = T_1, \quad T_{22} = T_2, \quad T_{33} = T_3, \quad T_{23} = T_{32} = T_4, \\ T_{13} = T_{31} = T_5, \quad T_{12} = T_{21} = T_6. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При проектировании упругих элементов часто возникает задача расчета напряжения вдоль некоторого направления, определяемого единичным вектором $\bar{l} \ l_1 l_2 l_3$, по известному в данной точке тензору напряжений. Искомое напряжение можно получить, применяя общее определение тензора второго ранга (2.2). Эти расчеты,

однако, удобнее приводить в матричной форме. Напряжения вдоль направления \bar{l} равны

$$T_l = l_1 l_2 l_3 \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Формула (2.2.13) – частный случай закона преобразований компонент тензора второго ранга, записанного в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Такая форма записи закона преобразования является с практической точки зрения наиболее удобной.

3. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

Упругие элементы микромеханических систем, находящиеся в напряженном состоянии, деформируются, т. е. расстояние и взаимная ориентация двух любых точек, относящихся к упругому элементу, изменяются. В теории упругости смещения любой точки твердого тела при деформации описываются с помощью вектора смещения \bar{u} , компоненты которого в общем случае зависят от положения точки в недеформированном теле, $\bar{u} = x_1 x_2 x_3$.

При исследовании разнообразных физических явлений в микросистемной технике ключевое значение имеет не абсолютное смещение точек, а их относительное перемещение и, следовательно, относительные деформации. Кроме того, практическое значение имеют только малые смещения, что обусловлено, в первую очередь, хрупким характером разрушения кремния.

Для пояснения идеи математического описания деформации рассмотрим растяжение тонкой пластинки (рис. 1.10). Выберем систему координат и зафиксируем ее в пространстве (система координат неподвижна!). Под действием механических напряжений пластинка деформируется и точка M с координатами $x_1 x_2$ перемещается в точку M' с координатами $x_1 + u_1$ и $x_2 + u_2$. Величины

u_1 и u_2 – компоненты вектора смещения точки M , и $u_1 u_2$ в выбранной системе координат.

Выделим на недеформированной пластинке малую прямоугольную область $M Q_1 Q_2 Q_3$ со сторонами Δx_1 и Δx_2 , параллельными осям x_1 и x_2 . После деформации эта область изменяет свои размеры и форму и имеет обозначение $M' Q'_1 Q'_2 Q'_3$. Отрезок MM' представляет собой вектор смещения точки M . Изменение размера проекции отрезка MQ'_1 на ось x_1 можно охарактеризовать отношением

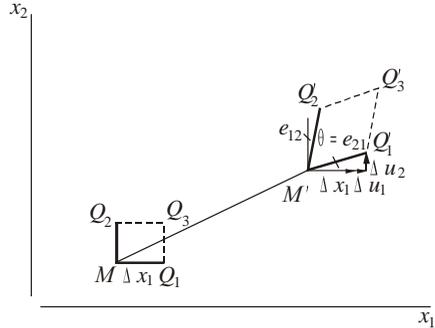


Рис. 1.10. Определение компонент деформаций при плоском растяжении

$$e_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}. \quad (3.1)$$

Поворот отрезка $M_1 Q'_1$ относительно оси x_1 можно охарактеризовать углом

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1}. \quad (3.2)$$

Поскольку углы поворота малы (следствие малости деформации), $\operatorname{tg} \theta \cong \theta$ и в знаменателе $\Delta u_1 \ll \Delta x_1$, из (3.2), получаем

$$\theta \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = e_{21}. \quad (3.3)$$

Рассматривая аналогичным образом изменение размеров и положения стороны $M' Q'_2$, можно получить соотношения

$$e_{22} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2}, \quad e_{12} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2}. \quad (3.4)$$

В пределе, при Δx_1 и $\Delta x_2 \rightarrow 0$, четыре безразмерные величины e_{ij} , $i, j = 1, 2$, характеризуют деформацию пластинки в точке. Более точно деформированное состояние упругого элемента описывает

тензор деформации ε_{ij} , построенный как симметризованная комбинация из e_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Применение симметризованных комбинаций частных производных позволяет исключить не интересные для теории упругости вращения пластинки как целого, когда расстояние и взаимное положение точек упруго элемента не изменяются.

В случае трех измерений, когда вектор смещения точки M зависит от трех координат $M(x_1, x_2, x_3)$, общий подход к определению тензора деформаций, изложенный выше, полностью сохраняется. Трехмерный тензор деформаций определяется симметризованными выражениями [6]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

или в развернутом виде

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Диагональные компоненты ε_{ij} в (3.6) описывают удлинение или сжатие сторон элементарного объема, остальные компоненты представляют сдвиговые деформации, характеризующие изменение углов между прямыми. Например, если в недеформированном упругом элементе две прямые образуют прямой угол, то после де-

формации угол будет равен $\varphi = 0.5\pi - 2\varepsilon_{13}$. Аналогично можно интерпретировать ε_{23} и ε_{31} .

Деформации называются однородными, если компоненты тензора не зависят от координат. В этом случае компоненты вектора смещений линейно зависят от координат точек в упругом элементе:

$$u_i = \varepsilon_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Так как тензор деформаций является симметричным, его можно привести к главным осям:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Для однородных деформаций направления главных осей одинаковы по всему упругому телу. В случае неоднородной деформации ориентация главных осей может меняться от точки к точке.

Если в матрице (3.8) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon$, то это соответствует деформации гидростатического сжатия.

Если $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -0.5\varepsilon$ и $\varepsilon_{33} = \varepsilon$, так что сумма диагональных компонент (шпур тензора) равна нулю, то имеем случай чистого сдвига. Этот тип деформаций характеризуется изменением только формы, но не объема любого выделенного элемента в твердом теле. Для плосконапряженного состояния тензор деформации чистого сдвига имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

При проектировании упругих элементов микросистемной техники часто приходится находить деформацию в заданном направлении, определяемом вектором \bar{l} . Эта деформация определяет относительное изменение размеров отрезка в направлении вектора \bar{l} . Используя общие соотношения (3.13), получаем

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{ij} l_j l_i. \quad (3.10)$$

Выражение (2.3.10) приобретает особенно простой вид, если тензор деформации имеет диагональную форму:

$$\varepsilon = l_1 \varepsilon_{11}^2 + l_2 \varepsilon_{22}^2 + l_3 \varepsilon_{33}^2. \quad (3.11)$$

Симметричность тензора деформаций позволяет рассматривать его независимые компоненты как составляющие шестимерного вектора. Переход от компонент тензора деформации к компонентам шестимерного вектора происходит по правилу

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &\rightarrow \varepsilon_1, & \varepsilon_{22} &\rightarrow \varepsilon_2, & \varepsilon_{33} &\rightarrow \varepsilon_3, \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} &= \varepsilon_6, & 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} &= \varepsilon_5, & 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} &= \varepsilon_4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда тензору деформации сопоставляется матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Компоненты матрицы (3.13) не преобразуются по закону (2.2) при повороте системы координат.

В заключение раздела отметим, что определение тензора деформаций (3.6) предполагает, что произведениями вида $\partial u_i / \partial x_j \cdot \partial u_k / \partial x_m$ можно пренебречь как величинами высшего порядка малости по компонентам вектора смещений. В ряде частных случаев, когда отдельные компоненты вектора смещения не являются малыми (например, в оболочках), общее выражение компонент тензора деформаций необходимо уточнять, включая вторые производные.

4. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Закон Гука устанавливает связь между механическими напряжениями и деформациями твердых тел. Кремниевые упругие элементы обладают анизотропными упругими свойствами, поэтому закон Гука записывается в тензорной форме

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} T_{kl}, \quad (4.1)$$

здесь S_{ijkl} – тензор упругих податливостей.

Закон Гука можно записать в виде обратного соотношения

$$T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.2)$$

где коэффициенты C_{ijkl} – компоненты тензора упругих жесткостей.

Тензоры податливостей и жесткостей являются тензорами четвертого ранга и имеют в общем случае $3^4 = 81$ компоненту. Симметрия тензоров деформаций и напряжений приводит к тому, что тензоры S_{ijkl} и C_{ijkl} симметричны по первому и второму, а также третьему и четвертому индексам, что следует из симметрии тензоров напряжений и деформаций. Кроме того, эти тензоры симметричны по перестановке первой и второй пар индексов, $S_{ijkl} = S_{klij}$ (см. разд. 3). Благодаря этому число независимых компонент тензоров упругих податливостей и жесткостей сокращается до 21.

Свойства симметрии тензоров упругих податливостей и жесткостей позволяет ввести матрицы податливостей и жесткостей размерности 6×6 , с которыми значительно удобнее работать, чем с тензорами. Наиболее проста связь между тензорами и матричными элементами для матрицы упругих жесткостей:

$$C_{ijkl} = C_{\alpha\beta},$$

$$\begin{array}{c|cccccc} ij & kl & 11 & 22 & 33 & 32=23 & 13=31 & 12=21 \\ \hline \alpha & \beta & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}, \quad (4.3)$$

где, например, $C_{1122} = C_{12}$, $C_{1321} = C_{56}$.

Для матрицы упругих податливостей переход от тензорных обозначений к матричным происходит по правилу

$$S_{ijkl} = S_{\alpha\beta}, \text{ если } \alpha \leq 3 \text{ и } \beta \leq 3,$$

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}, \text{ если } \alpha > 3 \text{ или } \beta > 3, \quad (4.4)$$

$$S_{ijkl} = \frac{1}{4} S_{\alpha\beta}, \text{ если } \alpha > 3 \text{ и } \beta > 3.$$

Матричные сокращения пар индексов, определенные соотношениями (4.3) и (4.4), позволяют представить тензоры упругих податливостей и жесткостей в виде симметричных 6×6 матриц, например:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Закон Гука в матричной форме записывается особенно просто:

$$\varepsilon_{\alpha} = S_{\alpha\beta} T_{\beta} \quad \text{или} \quad T_{\alpha} = C_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}. \quad (4.6)$$

Внутренняя симметрия кристаллической структуры дополнительно уменьшает число независимых компонент тензора, а следовательно, и матриц упругости и жесткости. Для важнейших полупроводников, таких как Si, Ge, GaAs, симметрия кристаллической решетки уменьшает число независимых компонент до трех:

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Структура матрицы жесткостей $C_{\alpha\beta}$ аналогична (4.7).

Для изотропной среды, в которой все направления равноправны по физическим свойствам, матрицы упругих жесткостей и

податливостей содержат лишь две независимые компоненты – S_{11} и S_{12} или C_{11} и C_{12} :

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}+C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}+C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}+C_{12}}{2} \end{vmatrix}, \quad (4.8)$$

$$S_{ij} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 S_{11} - S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 S_{11} - S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 S_{11} - S_{12} \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Зная компоненты матриц податливостей, можно вычислить компоненты матрицы упругих жесткостей и наоборот. Из закона Гука получаются следующие соотношения между компонентами матриц для кремния и других кристаллов, обладающих кубической симметрией:

$$C_{11} = \frac{S_{11} + S_{12}}{S_{11} - S_{12} \quad S_{11} - 2S_{12}}, \quad C_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11} - S_{12} \quad S_{11} + 2S_{12}},$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}},$$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11} - C_{12} \quad C_{11} + C_{12}}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{C_{11} - C_{12} \quad C_{11} + 2C_{12}},$$

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}}.$$

Упругие податливости и жесткости для кремния приведены в табл. 1.1 [7].

Таблица 1.1

Данные по упругим податливостям и жесткости для кремния

$S_{ij} \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$			$C_{ij} \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$		
S_{11}	S_{12}	S_{44}	C_{11}	C_{12}	C_{44}
0.774	-0.216	1.26	1.65	0.640	0.792

Значения податливостей и жесткостей приведены для кремния в системе основных кристаллографических осей [100]. Именно в этих осях структура тензора упругих податливостей и жесткостей, например (4.7), наиболее простая. Выбор любой другой системы координат требует пересчета компонент тензора. При этом, как правило, возрастает число отличных от нуля компонент и усложняется структура тензора. Компоненты тензора 4-го ранга при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по закону [6]

$$S'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} S_{mnpq}, \quad (4.11)$$

здесь S_{mnpq} – компоненты тензора в исходной системе координат $x_1 x_2 x_3$; S'_{ijkl} – компоненты тензора в новой системе координат $x'_1 x'_2 x'_3$; α_{ij} – матрица направляющих косинусов.

Преобразованием (4.11) неудобно пользоваться из-за его громоздкости. Удобнее иметь дело с матрицами упругих податливостей и жесткостей, однако для компонент матриц нельзя записать общего соотношения типа (4.11). Из матрицы направляющих косинусов можно построить специальную матрицу преобразования A (см. ниже табл. 4.4), содержащую 6×6 компонент, которая позволяет рассчитать матрицу упругих постоянных или жесткостей в новых осях по формуле

$$[S'] = [A][S][\tilde{A}].$$

Здесь \tilde{A} – транспонированная матрица преобразования A .

Для кристаллов, обладающих симметрией кремния, удобно пользоваться формулой [8]

$$S'_{ijkl} = S_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{S_{44}}{4} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} +$$

$$+ \left(S_{11} - S_{12} - \frac{S_{44}}{2} \right) \sum_{n=1}^3 \alpha_{in} \alpha_{jn} \alpha_{kn} \alpha_{ln}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

Здесь S'_{ijkl} – компоненты тензора упругих податливостей в новой системе координат; α – матрица направляющих косинусов; δ_{ij} – символ Кронекера.

Далее можно воспользоваться формулами перехода от тензорных обозначений к матричным и соотношениями между упругими податливостями и жесткостями (4.3), (4.10). В табл. 1.2 приведены отличные от нуля компоненты матриц упругих податливостей для двух систем координат, которые часто встречаются на практике.

Таблица 1.2

Компоненты матриц упругих податливостей для двух систем координат

	$S_{ij} \cdot 10^{11} \text{ м}^2/\text{Н}$			
	S_{11}	S_{12}	S_{22}	S_{66}
$x_1 \parallel [1\bar{1}0]$	0.591	-0.214	0.768	1.256
$x_2 \parallel [00\bar{1}]$				
$x_3 \parallel 110$				
$x_1 \parallel [1\bar{1}0]$	0.591	-0.155	0.591	1.492
$x_2 \parallel [11\bar{2}]$				
$x_3 \parallel 111$				

Кремний является материалом с выраженной анизотропией упругих свойств. Это проявляется, в частности, в угловой зависимости модуля Юнга, входящего в обычное выражение для закона Гука:

$$T = E\varepsilon,$$

где T и ε – напряжения и деформации вдоль одного направления.

Если из слитка кремния вырезать полоски, имеющие различную кристаллографическую ориентацию, то модуль Юнга будет зависеть от выбранной ориентации в соответствии с соотношением

$$E = \frac{1}{S_{11} - 2 \left(S_{11} - S_{12} - \frac{S_{44}}{2} \right) l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_3^2}, \quad (4.13)$$

где l_1, l_2, l_3 – направляющие косинусы длинной оси полоски по отношению к главным осям 100. Наибольшее значение $1.87 \cdot 10^{11}$ Н/м² модуль Юнга в кремнии имеет для направления 111, наименьшее $1.3 \cdot 10^{11}$ Н/м² – для направления 100.

Анизотропия упругих свойств кремния проявляется и в том, что коэффициент Пуассона зависит от кристаллографической ориентации сторон кремниевой полоски:

$$\nu = -\frac{S'_{12}}{S'_{11}},$$

здесь штрих означает, что вычисления нужно вести в системе координат, связанной со сторонами образца.

Если m_1, m_2, m_3 – направляющие косинусы оси, ортогональной к вектору **I**, то угловая зависимость коэффициента Пуассона может быть представлена выражением

$$\nu' = -\frac{2S_{12} + S_A (l_1^2 m_1^2 + l_2^2 m_2^2 + l_3^2 m_3^2)}{2 S_{11} - S_A (l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_1^2 l_3^2)}, \quad (4.14)$$

где $S_A = 2 S_{11} - S_{12} - S_{44}$.

Угловые зависимости модуля Юнга и коэффициента Пуассона для важнейшей кристаллографической плоскости (100), как следует из (4.13) и (4.14), имеют вид

$$E_{100} = 0.768 - 0.704 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad (4.15)$$

$$\nu_{100} = \frac{0.214 - 0.708 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{0.768 - 0.708 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}, \quad (4.16)$$

если угол θ отсчитывать от оси [010].

Таблица 1.3

Максимальные и минимальные значения коэффициентов Юнга и Пуассона

Плоскость	$E_{\max} \cdot 10^{11}$ Па	$E_{\min} \cdot 10^9$ Па	ν_{\max}	ν_{\min}
(111)	1.69, изотропия		0.262, изотропия	
(100)	1.69	1.30	0.279	0.064
(110)	1.87	1.30	0.384	0.143

В табл. 1.3 приведены максимальные и минимальные значения модуля Юнга и коэффициентов Пуассона для важнейших кристаллографических плоскостей.

В плоскости (111) модуль Юнга и коэффициент Пуассона не зависят от направления.

5. ВАЖНЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Выделим внутри напряженного твердого тела элементарный прямоугольный параллелепипед с началом координат в его центре и размерами ребер Δx_1 , Δx_2 и Δx_3 , параллельных одноименным осям. На выделенный объем действуют как силы со стороны остальных частей твердого тела, которые описываются тензором напряжений T_{ij} , так и объемные силы, например сила тяжести, которая характеризуется вектором ускорения \bar{g} с проекциями g_i , $i = 1, 2, 3$, в системе координат, связанной с элементарным объемом. В силу малости размеров выделенного объема компоненты тензора напряжений можно разложить в ряд Макларена и ограничиться первыми двумя членами, например:

$$T_{11}\left(\pm \frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0\right) \simeq T_{11} \quad 0 \pm \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2}. \quad (5.1)$$

Таким образом, механические напряжения, действующие на граничные площадки элемента, выражаются через напряжения в центре элементарного объема и производные от напряжений.

Результирующая сила от компоненты напряжения T_{11} , действующая на выделенный объем в направлении оси ox_1 , будет равна

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[\left(T_{11} \quad 0 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \frac{1}{2} \Delta x_1 \right) \Delta x_2 \Delta x_3 - \left(T_{11} \quad 0 - \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2} \right) \Delta x_2 \Delta x_3 \right] = \\ &= \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В направлении ox_1 действуют еще и силы, приложенные к площадкам, перпендикулярным к осям x_2 и x_3 :

$$F_2 = \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \quad F_3 = \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \quad (5.3)$$

Сила тяжести относится к объемным силам. Ее величина равна произведению массы на ускорение силы тяжести:

$$F_{gi} = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.4)$$

где ρ – плотность твердого тела.

Произведение $\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta M$ имеет смысл массы выделенного объема. Учитывая (5.2) – (5.4), согласно второму закону Ньютона получаем

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_{g1} + \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 g_1 = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \ddot{x}_1. \quad (5.5)$$

Сокращая (2.5.5) на произведение $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, запишем [6]

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho g_1 = \rho \ddot{x}_1. \quad (5.6)$$

Рассматривая силы, действующие вдоль осей x_2 и x_3 , можно получить еще два аналогичных уравнения. В итоге получаются основные уравнения теории упругости, представляющие в сущности специальную форму записи второго закона Ньютона:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho \ddot{x}_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

Если все части тела находятся в статическом равновесии, то уравнение (5.7) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\rho g_i. \quad (5.8)$$

Это уравнение статического равновесия упругого тела с учетом силы тяжести. Если ее не учитывают, например, из-за малости, то уравнение (5.8) принимает особенно простой вид:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (5.9)$$

Уравнения движения (5.7) или статики (5.8) и (5.9) являются основными уравнениями теории упругости.

5.2. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Определение напряженного состояния в упругом элементе под действием заданных внешних сил является одной из основных задач теории упругости. Напряженное состояние упругого элемента с учетом симметрии описывается шестью компонентами тензора напряжений, а уравнений движения (5.7) или статики (5.8) – (5.9) – только тремя. Чтобы получить недостающие уравнения, следует рассмотреть упругую деформацию твердого тела.

Как видно из уравнения (3.6), компоненты тензора деформаций выражаются через производные от трех компонент вектора смещения. Из-за этого появляется зависимость между производными от тензора деформаций, которые в теории упругости именуется уравнениями неразрывности. Проще всего установить связь между компонентами тензора деформаций ε_{11} , ε_{22} и ε_{12} , которые играют основную роль при описании плоских деформаций. Прямым дифференцированием (3.6) легко показать справедливость соотношения [9]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.10)$$

Это частный пример из системы уравнений неразрывности, которые в общей форме записи имеют вид [10]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}, \quad (5.11)$$

где $i, k, l = 1, 2, 3$, причем $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{11}$, или ε_{22} , или ε_{33} .

Уравнения (5.11) образуют дополнительную систему из шести дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять компоненты тензора деформаций. В уравнения неразрывности обычно подставляются деформации, выраженные через напряжения по закону Гука. Если к уравнениям (5.7) и (5.11) добавить граничные условия – значения компонент тензора напряжений на поверхности тела, то задача математически становится полностью определенной и допускает единственное решение.

6. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Работа внешних сил, приложенных к твердому телу, полностью превращается в его потенциальную энергию, если деформация происходит изотермически и обратимо. Предполагая далее выпол-

нение этих условий, рассмотрим изменение потенциальной энергии единичного элементарного объема, выделенного в твердом теле, на грани которого действуют механические напряжения T_i , а сам объем испытывает однородную деформацию ε_i .

Если компоненты деформации возрастают с ε_i до $\varepsilon_i + d\varepsilon_i$, где $d\varepsilon_i$ – малые приращения деформаций, то работа, производимая напряжениями T_i , в тензорных обозначениях будет равна

$$dA = T_{ij}d\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

По своей структуре работа (2.6.1) полностью аналогична работе, производимой внешней силой при растяжении обычной пружины. Выражая напряжение через деформацию по закону Гука, получаем

$$dA = C_{ij}\varepsilon_j d\varepsilon_i.$$

Эта работа идет на изменение свободной энергии dF , равной при выбранных условиях изменению потенциальной энергии dU :

$$dA = dF = dU = C_{ij}\varepsilon_j d\varepsilon_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что компоненты тензора упругих жесткостей можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij}. \quad (6.3)$$

Поскольку свободная энергия есть функция состояния тела, порядок дифференцирования в (6.3) не играет роли, откуда следует симметричность тензоров жесткости и, по аналогии, упругости по перестановкам первой и второй пары индексов (в тензорных обозначениях):

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad S_{ij} = S_{ji}. \quad (6.4)$$

Интегрируя (2.6.2) по объему V деформированного тела, получаем для потенциальной энергии общее выражение [6]

$$U = \int_V \frac{C_{ij}\varepsilon_j \varepsilon_i}{2} dv. \quad (6.5)$$

Подынтегральная функция

$$u = \frac{C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j}{2} \quad (6.6)$$

именуется удельной потенциальной энергией деформированного тела.

Потенциальная энергия деформированного тела играет ключевую роль при решении многих задач теории упругости, поскольку входит в два фундаментальных вариационных принципа механики: принципа возможных перемещений и принципа Лагранжа.

Принцип возможных перемещений утверждает, что если механическая система (твердое тело) находится в равновесии, то сумма работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на всяком бесконечно малом возможном перемещении равна нулю [11]:

$$\delta A_{\text{вн}} + \delta A_{\text{вн}} = 0, \quad (6.7)$$

где $\delta A_{\text{вн}}$ и $\delta A_{\text{вн}}$ – работы внешних и внутренних сил на выбранном перемещении. Поскольку работа внутренних сил равна убыли потенциальной энергии ($\delta A_{\text{вн}} = -\delta U$), на том же перемещении, то из (6.7) получаем

$$\delta A_{\text{вн}} = -\delta U = 0. \quad (6.8)$$

Если полагать, что оператор варьирования общий для обоих слагаемых, то (6.8) можно переписать в виде

$$\delta U - A_{\text{вн}} = 0. \quad (6.9)$$

Разность $U - A_{\text{вн}}$ именуется полной энергией системы, так что $\delta \Pi = 0$. Это означает, что полная потенциальная энергия обладает свойством экстремальности.

Вариационный принцип Лагранжа учитывает это свойство и утверждает, что из всех возможных состояний равновесия системы, на которую действуют силы, имеющие потенциал, реализуются те состояния, для которых полная потенциальная энергия имеет стационарное значение. Для задач микросистемной техники наиболее важны те решения, когда полная энергия минимальна, что соответствует устойчивому состоянию:

$$\Pi = U - A_{\text{вн}} = \min. \quad (6.10)$$

В этой формулировке принцип Лагранжа является основой для решения огромного количества практических задач. Некоторые примеры будут даны в следующей главе.

7. МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГОМ ЭЛЕМЕНТЕ БАЛОЧНОГО ТИПА

Упругие элементы балочного типа чаще всего применяются в акселерометрах, некоторых типах измерителей сил или небольших давлений [1]. В этом разделе будет рассмотрено напряженное состояние консольно заземленной балочки прямоугольного сечения (рис. 1.11), на свободный конец которой действует сосредоточенная сила. Балочка имеет поперечные размеры $a \times b$, а начало системы координат выбрано в центре свободного конца балочки. Для определенности будем считать, что оси x_1, x_2, x_3 совпадают с главными кристаллографическими осями 100 кремния. Линия действия сосредоточенной силы лежит в плоскости x_1ox_3 .

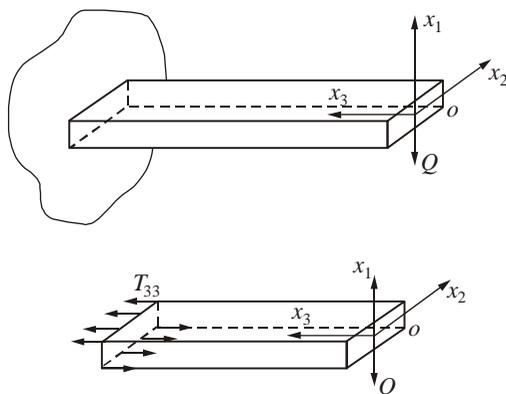


Рис. 1.11 . Схема нагружения балочного элемента

В реальном упругом элементе сосредоточенная сила Q может действовать на небольшой участок верхней поверхности. Действительное распределение механических напряжений вблизи этого участка неизвестно, поскольку неизвестна форма поверхности контактирующего с балочкой тела. Для упрощения математической формулировки задачи воспользуемся принципом Сен-Венана, который широко применяется при решении задач теории упругости. Этот принцип заключается в следующем [12]. Если на какой-либо площадке ΔS поверхности тела действует система сил с главным вектором \bar{F} и моментом \bar{M} и в пределах площадки ΔS происходит перераспределение сил, так что \bar{F} и \bar{M} неизменны, то эти пе-

нераспределения не скажутся для точек, удаленных от площадки на расстояние, превышающее ее максимальный размер.

Принцип Сен-Венана дает определенную свободу в записи граничных условий. Пользуясь этим, предположим, что изгибающая сила Q балочки приложена к середине ее сечения $x_3 = 0$. Решения, найденные для такого характера нагружения, будут справедливы для точек балочки $x_3 > b$, если b – максимальный размер сечения.

При таком характере нагружения верхние волокна балочки будут растягиваться, а нижние – сжиматься. Учитывая, что толщина a упругих элементов сенсоров много меньше ширины b и длины L , можно считать, что компонента тензора T_{33} пропорциональна удаленности волокна балочки относительно нейтральной оси, совпадающей с осью x_1 , т.е.

$$T_{33} = Kx_1, \quad (7.1)$$

где K – коэффициент пропорциональности. Его значение можно установить из условия равновесия упругого элемента под действием нагрузки. Для этого сечением $x_3 = c$ выделим часть упругого элемента справа от сечения, остальную часть балочки мысленно отбросим. Для того чтобы равновесие правой части не нарушалось, действие отброшенной левой части заменим силами, распределенными по сечению $x_3 = c$ в соответствии с рис. 1.11, где указаны направления действия компоненты тензора напряжения T_{33} . Так как «отрезанная» часть упругого элемента находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через середину сечения $x_3 = \text{const}$ параллельно оси x_2 , должна быть равна нулю

$$Q x_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} T_{33} x_1 dS = 0, \quad (7.2)$$

где dS – элемент поверхности сечения $x_3 = c$.

Подставляя в (7.2) вместо T_{33} равенство (7.1), находим коэффициент пропорциональности K

$$T_{33} = \frac{12Q}{a^3 b} x_3 x_1.$$

Для всех точек упругого элемента, кроме торцов балочки, внешние силы отсутствуют (собственным весом балочки по сравнению с силой Q будем пренебрегать), поэтому для поверхностных точек упругого элемента выполняются равенства

$$T_{11} = T_{21} = T_{31} \Big|_{x_1 = \pm \frac{a}{2}} = 0, \quad T_{22} = T_{12} = T_{32} \Big|_{x_2 = \pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (7.3)$$

Если деформации волокон балочки невелики, то можно считать, что слои, параллельные боковым граням, не давят друг на друга и не стремятся сдвинуть друг друга. Это позволяет принять для всех точек сечения $x_3 = c$

$$T_{11} = T_{12} = T_{22} = 0. \quad (7.4)$$

Для нахождения остальных компонент T_{13} и T_{23} необходимо использовать уравнения равновесия (5.9) и уравнения неразрывности для тензора деформаций (5.11). Соответствующий расчет приведен, например, в [10, 12], который дает

$$T_{31} = \frac{3Q}{2ab} \left[1 - \left(\frac{2x_1}{a} \right)^2 \right] + \frac{S_{12}}{S_{44}} \frac{Qb}{a^3} \left\{ \left[1 - 3 \left(\frac{2x_2}{b} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n-1}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{2\pi n}{b} x_2 \operatorname{ch} \frac{2\pi n}{b} x_1 \right\}, \quad (7.5)$$

$$T_{32} = \frac{12}{\pi^2} \frac{S_{12}}{S_{44}} \frac{Qb}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n-1}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{2\pi n}{b} x_2 \operatorname{sh} \frac{2\pi n}{a} x_1.$$

Вычисления этих компонент тензора напряжений облегчаются несколькими обстоятельствами:

1. Тригонометрические ряды в формулах (7.5) быстро сходятся и практически достаточно ограничиться 3-4 членами ряда.
2. В сенсорах с применением технологии микросистемной техники тензорезистивные слои имеют малую глубину по сравнению с толщиной упругого элемента. Поэтому для всех точек тензорезистивного слоя можно принять, что координата $x_1 \approx 0.5a$, т.е. он

расположен на поверхности и, как следствие, $T_{31} \ll T_{33}$. Кроме того, тензорезисторы стремятся разместить в центре балочки, когда $x_2 = 0$, что приводит к равенству $T_{32} = 0$.

Для узких балочек, когда $a \gg b$, выражением в фигурных скобках для T_{31} в (7.5) можно пренебречь. Кроме того, хорошо выполняется соотношение $T_{31} \gg T_{23}$. В результате тензор напряжений будет иметь вид

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{6Q}{a^3b} \left(\frac{a^2}{4} - x_1^2 \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{6Q}{a^3b} \left(\frac{a^2}{4} - x_1^2 \right) & 0 & \frac{12Q}{a^3b} x_1 x_3 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

В таком виде тензор встречается в учебном курсе по сопротивлению материалов при расчете балки на изгиб.

Компоненты тензора деформации волокон балочки можно найти, используя закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = S_{12}T_3, \quad \varepsilon_3 = S_{11}T_3, \quad \varepsilon_4 = S_{44}T_4, \quad \varepsilon_5 = S_{44}T_5, \quad \varepsilon_6 = 0.$$

На поверхности упругого элемента выполняются равенства $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

Деформация упругого элемента приводит к смещению конца балочки. Вертикальная составляющая этого смещения равна [10]

$$U_0 = -\frac{4QS_{11}}{a^3b} L^3. \quad (7.7)$$

Если балочка имеет кристаллографическую ориентацию, отличную от рассмотренной, то для расчета деформаций нужно матрицу упругой податливости найти в системе координат, связанной со сторонами балочки, и использовать полную систему уравнений равновесия и неразрывности деформаций.

8. ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

Упругие элементы в виде тонких пластинок (мембран) различных очертаний широко применяются в микросистемной технике и в первую очередь в сенсорах давления. В данном разделе обсужда-

ется постановка задачи по определению деформаций и напряжений нагруженных пластинок. Имея в виду широкое применение сенсоров давления, в качестве нагрузки рассматривается случай равномерного распределения давления по поверхности упругого элемента (рис. 1.12).

Далее пластинка будет предполагаться тонкой, т. е. ее толщина h много меньше, чем характеристический размер в плане a (например, диаметр или сторона квадрата). Обычно это условие формулируется в виде соотношения

$$h < \frac{1}{5} a. \quad (8.1)$$

Для кремниевых упругих элементов сенсоров давления величина воздействующей нагрузки выбирается такой, чтобы она приводила к малым прогибам w , когда выполняется соотношение

$$w \leq \frac{1}{5} h. \quad (8.2)$$

При этом связь между измеряемым давлением, прогибом и деформацией упругого элемента оказывается линейной. Важно также, что в случае малых прогибов решение многих задач удастся получить в аналитической форме.

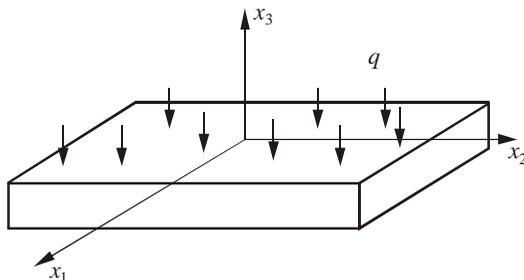


Рис. 1.12. Схема нагружения упругого элемента

Свяжем со срединной плоскостью недеформированной пластины ортогональную систему координат $x_1x_2x_3$. На кристаллографическую ориентацию пластины никаких ограничений не накладываем. Из условия малости прогибов следует:

1. Точки срединной плоскости смещаются по вертикали, причем прогибы w зависят только от координат x_1x_2 в плоскости упругого элемента.

2. Плоскости сечений упругого элемента, перпендикулярные к срединной плоскости в недеформированном состоянии, остаются перпендикулярными и после приложения нагрузки.

3. Компоненты тензора напряжений T_{33}, T_{31}, T_{32} много меньше T_{11}, T_{12}, T_{22} .

Искривление срединной плоскости приводит к появлению компонент u_1 и u_2 вектора смещения для точек, не принадлежащих срединной плоскости. На рис. 1.13 показано возникновение компоненты u_1 вектора смещения точки M' .

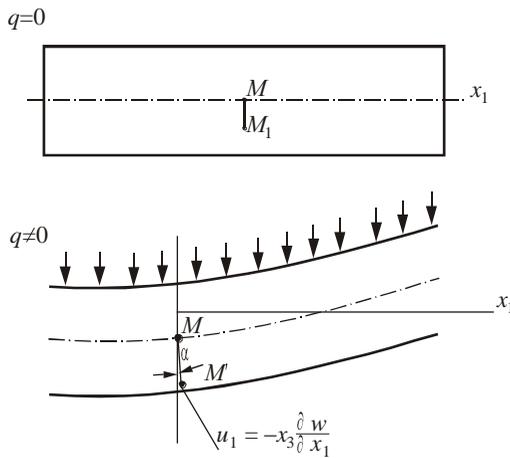


Рис. 1.13. Смещение точек при изгибе упругого элемента

Поворот отрезка MM' при изгибе приводит к смещению точки M' вдоль оси x_1 на величину

$$u_1 = x_3 \cdot \sin \alpha.$$

В силу малости прогибов $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = -\partial w / \partial x_1$, откуда $u_1 = -x_3 (\partial w / \partial x_1)$.

Таким образом, для малых прогибов упругого элемента компоненты вектора смещения точек пластины имеют вид

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w. \quad (8.3)$$

Подставляя эти смещения в (3.6), находим компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, & \varepsilon_{22} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \varepsilon_{12} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Далее, используя закон Гука (4.6), получаем следующие выражения для наибольших компонент тензора напряжений:

$$T_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_6 \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{vmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_6 \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{vmatrix}, \quad (8.5)$$

$$T_6 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_6 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{vmatrix}.$$

Для нахождения компонент тензора напряжений T_{13} , T_{23} , T_{33} необходимо проинтегрировать уравнения равновесия теории упругости с учетом граничных условий. Давление действует вдоль направления x_3 , поэтому на поверхностях упругого элемента $x_3 = \pm h/2$ компоненты тензора напряжений T_{13} , T_{23} равны нулю. Используя эти граничные условия и интегрируя уравнения равновесия (5.9), получаем

$$\begin{aligned} T_{23} &= \frac{\left(x_3^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right)}{\Delta} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} S_{22} S_{66} - S_{26}^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} S_{12} S_{16} - S_{11} S_{26} + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x_2} S_{16} S_{26} - S_{12} S_{66} + 2S_{11} S_{22} - 2S_{12}^2 + \right. \\ &\left. \left. + 3 \frac{\partial w}{\partial x_1} S_{12} S_{26} - S_{22} S_{16} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} = \frac{1}{\Delta} \left(x_3^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) & \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} S_{12} S_{26} - S_{22} S_{16} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} S_{11} S_{66} - S_{16}^2 + \right. \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} S_{16} S_{26} - S_{12} S_{66} + 2S_{11} S_{22} - 2S_{12}^2 + \right. \\
& \left. \left. + 3 \frac{\partial w}{\partial x_2} S_{12} S_{16} - S_{26} S_{11} \right] \right\}. \quad (8.6)
\end{aligned}$$

Множитель Δ определен выражением (8.5). Во многих случаях глубина тензорезистивных слоев значительно меньше толщины пластины, так что для всех точек тензорезистора можно принять $x_3 = \pm h/2$ и тогда $T_{13} = T_{23} = 0$.

Граничные условия для компоненты тензора T_{33} имеют вид $T_{33} = 0$ при $x_3 = -0.5h$ и $T_{33} = -q$ при $x_3 = +0.5h$. Малая толщина пластины позволяет видоизменить граничные условия без ощутимой потери точности, так что решение краевой задачи упрощается. Принимается, что приложенная нагрузка q равномерно распределена по толщине пластины, что соответствует объемной силе q/h . В таком приближении краевая задача для компоненты T_{33} тензора напряжений принимает вид [12]

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = -\frac{q}{h}, \quad T_{33}|_{x_1=\pm \frac{h}{2}} = 0. \quad (8.7)$$

Подставляя в уравнение (8.7) найденные выражения для T_{13} и T_{23} (8.6), получаем после интегрирования

$$\begin{aligned}
T_{33} = -x_3 \frac{q}{h} - \frac{x_3}{2\Delta} \left(\frac{x_3^2}{3} - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) & \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} S_{22} S_{66} - S_{26}^2 + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} S_{11} S_{66} - S_{16}^2 + \right. \\
& + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} 2S_{11} S_{22} - S_{12} S_{66} - 2S_{12}^2 + S_{16} S_{26} + \\
& \left. + 4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} S_{12} S_{16} - S_{11} S_{26} + 4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} S_{12} S_{26} - S_{22} S_{16} \right\}. \quad (8.8)
\end{aligned}$$

Поскольку при $x_3 = +0.5h$ должно выполняться граничное условие $T_{33} = 0$, из (8.8) получаем уравнение на прогибы пластины:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} S_{22} S_{66} - S_{26}^2 + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} S_{11} S_{66} - S_{16}^2 + \\ & + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} 2S_{11} S_{22} - 2S_{12}^2 - S_{12} S_{66} + S_{16} S_{26} + \\ & + 4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} S_{12} S_{16} - S_{11} S_{26} + 4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} S_{12} S_{26} - S_{22} S_{16} = \frac{12\Delta q}{h^3}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Часто уравнение (2.8.9) записывают в компактной форме:

$$\hat{L} w_{x_1 x_2} = q, \quad (8.10)$$

где \hat{L} – оператор дифференциального уравнения (8.9):

$$\begin{aligned} \hat{L} = \frac{h^3}{12\Delta} \left[& S_{22} S_{66} - S_{26}^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + S_{11} S_{66} - S_{16}^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \right. \\ & + 2 S_{11} S_{22} + S_{16} S_{26} - 2S_{12}^2 - S_{12} S_{66} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ & \left. + 4 S_{12} S_{16} - S_{11} S_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 4 S_{12} S_{26} - S_{22} S_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovacs G.T.A. Micromachined Transducers Sourcebook. – Boston: WCB/McGraw-Hill Companies, Inc, 1998. – 911 p.
2. Bloom D.M. The Grating Light Valve: Revolutionizing Display Technology // Proc. SPIE, San Jose, Feb. 10–12, 1997. – Vol. 3013. – P. 165–171.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М., 1963. – 635 с.
4. Doetzel W., Gessner T, Hahn R, Kaufmann C, Kehr K., Kurth S, Mehner J. Silicon Mirrors and Micromirror Arrays for Spatial Laser Beam Modulation // Proc. Transducers, Chicago, 1997. – Vol. 1. – P. 81–84.

5. *Nguyen C.T.C.* Micromechanical Resonators for Oscillators and Filters // *Ultrasonics Symp.: Proc.* – 1995. – P. 489.
6. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
7. *Heuberger A.* Mikromechanik. – В.: Springer-Verlag, 1991. – 501 p.
8. *Thomas T.I.* Proc. of the National Academy of Science. – USA, 1966. – Vol. 55. – P. 235.
9. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М., 1975. – 575 с.
10. *Минкевич Л.М.* Механика сплошной (анизотропной) среды. – Новосибирск: НГТУ, 1970. – 103 с.
11. *Шнигельбурд И.Я., Атапин В.Г.* Основы расчета ежедневных систем методом конечных элементов. – Новосибирск: НГТУ, 1992. – 50 с.
12. *Минкевич Л.М.* Прикладная механика. – Новосибирск, 1990. – 76 с.