

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

**Н.Г.Бойко, Т.А.Устименко Т.А.**

**Теория и методы  
инженерного  
эксперимента**

---

Курс лекций

Донецк, 2009

Министерство образования и науки Украины  
Донецкий национальный технический университет

**Н.Г.Бойко, Т.А.Устименко**

**Теория и методы  
инженерного эксперимента  
(курс лекций)**

Донецк, 2009

УДК 65.012.122

Теория и методы инженерного эксперимента: Курс лекций/Н.Г.Бойко, Т.А.Устименко.-Донецк, ДонНТУ, 2009г. – 158с.

Курс лекций условно можно разделить на три основные части, соответствующие главным методам научного исследования в технике. Это теория подобия, теория математического планирования эксперимента, статистическая обработка экспериментальных данных.

Рассмотрены основные признаки подобных систем (виды подобия, константы и критерии подобия), приведены основные теоремы теории подобия. Показано, как можно понизить размерность задачи и сделать обобщающие выводы для исследуемой группы подобных объектов или явлений.

Изложены основные принципы построения плана эксперимента, как для линейных, так и квадратичных моделей. Рассмотрены основные алгоритмы проведения эксперимента при поиске оптимальных условий.

Показано, как необходимо обрабатывать результаты экспериментов, чтобы получать достоверные характеристики на основе данных, имеющих погрешности.

Донецк, 2009 г.

## Оглавление

Введение.....	7
1. Основные задачи исследовательской работы.....	13
1.1. Задачи теоретических исследований.....	13
1.2. Классификация экспериментальных исследований.....	13
2. Общая характеристика объекта исследования.....	19
2.1. Параметры и предъявляемые к ним требования.....	20
2.2. Факторы и предъявляемые к ним требования.....	21
2.3. Основные свойства объекта исследования.....	22
3. Моделирование и подобие.....	24
3.1. Построение моделей.....	25
3.2. Сущность подобия. Теоремы подобия.....	26
3.3. Критерии подобия, $\pi$ – теорема.....	31
4. Основы математического планирования эксперимента.....	33
4.1. Историческая справка.....	33
4.2. Основные понятия и определения.....	34
4.3. Представление результатов экспериментов.....	36
4.4. Разложение функции отклика в степенной ряд, кодирование факторов.....	39
4.5. Полный факторный эксперимент.....	41
4.6. Свойства полного факторного эксперимента $2^k$ .....	42
4.7. Выбор модели при проведении полного факторного эксперимента.....	43
4.8. Дробный факторный эксперимент.....	45
4.9. Обобщающий определяющий контраст.....	47
4.10. Планирование экспериментов при построении квадратичной модели.....	48
4.11. Ортогональное центральное композиционное планирование.....	50
4.12. Рототабельное композиционное планирование.....	50
4.13. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.....	52
4.13.1. Метод покоординатной оптимизации.....	53
4.13.2. Метод крутого восхождения.....	54
4.13.3. Симплекс-планирование.....	56
5. Статистический анализ экспериментальных данных.....	59
5.1. Элементы теории вероятностей.....	61
5.2. Числовые характеристики случайной величины.....	66
5.3. Числовые характеристики положения (мода, медиана, квантили).....	69
5.4. Типовые законы распределения.....	72
5.4.1. Геометрическое распределение.....	72
5.4.2. Биномиальное распределение.....	72

5.4.3.	Распределение Пуассона .....	73
5.4.4.	Равномерное распределение .....	74
5.4.5.	Экспоненциальное распределение .....	75
5.4.6.	Нормальный закон распределения .....	76
5.4.7.	Распределение $\chi^2$ (хи – квадрат).....	80
5.4.8.	Распределение Стьюдента .....	82
5.5.	Числовые характеристики системы случайных величин (ковариация и корреляция).....	84
5.6.	Нормальное распределение системы случайных величин .....	85
5.7.	Элементы математической статистики .....	86
5.7.1.	Генеральная совокупность и случайная выборка.....	87
5.7.2.	Точечные оценки параметров нормального распределения.....	88
5.7.3.	Классификация ошибок измерения.....	89
5.7.4.	Закон сложения ошибок .....	90
5.7.5.	Ошибки косвенных измерений.....	91
5.8.	Доверительные интервалы и доверительная вероятность.....	91
5.9.	Определение необходимого количества опытов .....	95
5.10.	Проверка статистических гипотез.....	96
5.10.1	Отсев грубых погрешностей наблюдений.....	99
5.10.2.	Сравнение двух рядов наблюдений.....	100
5.10.3.	Проверка однородности дисперсий.....	100
5.10.4.	Проверка однородности нескольких дисперсий .....	101
5.10.5.	Проверка гипотез о числовых значениях математических ожиданий.....	103
5.11.	Критерии согласия. Проверка гипотез о виде функции распределения.....	105
5.11.1.	Критерий Пирсона.....	106
5.11.2.	Критерий Колмогорова.....	107
5.11.3.	Критерий однородности статистического материала.....	108
6.	Анализ результатов эксперимента.....	113
6.1.	Характеристика видов связей между рядами наблюдений .....	113
6.2.	Метод наименьших квадратов .....	115
6.3.	Определение тесноты связи между случайными величинами.....	116
6.4.	Регрессионный анализ.....	119
6.4.1.	Проверка адекватности модели .....	119
6.4.2.	Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.....	121
7.	Основы теории случайных процессов и их статистической обработки.....	123
7.1.	Понятие случайной функции (процесса) .....	123
7.2.	Характеристики случайного процесса.....	124

7.3. Классификация случайных процессов .....	134
7.4. Функции спектральной плотности.....	136
8. Компьютерные методы статистической обработки результатов инженерного эксперимента .....	145
8.1. Общие замечания .....	145
8.2. Использование пакета MS EXCEL для статистической обработки экспериментальных данных .....	149
Список использованных источников .....	154

## Введение

**Теория** – система основных идей в той или иной отрасли знания; форма научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности.  
Критерий истинности и основа развития теории – практика.

Рассмотрим основные этапы развития теории и получения нового научного знания.

Основой любых исследований является **мышление**. Благодаря абстрактному мышлению человек получает новые знания не непосредственно, а опосредованно, через другие знания. Знание, полученное из уже имеющихся знаний, без обращения к опыту (практике) называется **выводным**, а процесс его получения **выводом**.

Выводы осуществляются в процессе рассуждений, подчиняющимся **законам мышления**.

Определенность и последовательность наших выводов (т.е. мышления) не возможны без точного употребления **понятий**.

**Понятие** – это результат отражения в сознании человека общих свойств группы предметов или явлений, которые существенны и необходимы для выделения рассматриваемой группы.

Понятия бывают:

- общие и единичные,
- собирательные (относящиеся к группам предметов – промышленное предприятие, транспорт),
- конкретное,
- абстрактное (к отдельно взятым признакам предметов - белый),
- относительное – парное (правый-левый, начальник-подчиненный, ребенок - взрослый),
- абсолютное – не имеет парных отношений (дом, дерево).

Объект исследования характеризуют определенные признаки.

**Признаки** – это свойства и отношения, характеризующие тот или иной объект. Признаки, которые выражают внутреннюю природу объекта, его сущность, называются **существенными**. Они всегда принадлежат данному объекту. Признаки, которые могут принадлежать, но могут и не принадлежать объекту, и которые не выражают его сущности, называются **несущественными**.

Признаки разделяются на *отличительные* и *неотличительные*. *Отличительные* признаки присущи рассматриваемому объекту (или определенному классу объектов) и позволяют выделить его (их) из всего многообразия объектов. *Неотличительные* признаки могут принадлежать не только рассматриваемому объекту, но и другим.

Метод (греч. *methodos*) – в самом широком смысле слова – путь к чему-либо. Ф.Бэкон сравнивал метод со светильником, освещающим путнику дорогу в темноте, и полагал, что нельзя рассчитывать на успех в каком-либо деле, идя ложным путем. Основным методом познания он считал индукцию, которая требует от науки исходить из эмпирического анализа, наблюдения и эксперимента с тем, чтобы на этой основе познавать законы природы. Р.Декарт методом называл «точные и простые правила», соблюдение которых способствует приращению знаний, позволяет отличить ложное от истинного. Он говорил, что уж лучше не помышлять об отыскивании каких-либо истин, чем делать это без всякого метода.

Итак, *метод* мы понимаем как *способ достижения цели*. Методы подразделяют на несколько уровней:

- *эмпирический уровень*, на нем применяют наблюдение, сравнение, счет, измерение и др., при этом происходит накопление фактов и их описание;

- *экспериментальный (теория, гипотеза)* – эксперимент, анализ-синтез, индукция-дедукция, моделирование, логический метод. На этом уровне осуществляется также описание-накопление фактов и их проверка. Факты имеют ценность, только когда они систематизированы, проверены, обработаны;

- *теоретический* – абстрагирование, идеализация, формализация, анализ-синтез, индукция-дедукция, аксиоматика, обобщение. На этом уровне проводится логическое исследование собранных фактов, выработка понятий, суждений, умозаключений. Соотносятся ранние научные представления с возникающими новыми, создаются теоретические обобщения. Новое теоретическое содержание знания надстраивается над эмпирическими знаниями;

- *метатеоретический* – метод системного анализа. Этими методами используются сами теории, разрабатываются пути из построения, устанавливающие границы из применения. Т.е. на этом



уровне происходит познание условий формализации научных теорий и выработка формализованных языков, именуемых метаязыками.

Рассмотрим основные методы, используемые на этапе экспериментальных и теоретических исследований:

**Сравнение** – это операция мышления, направленная на установление сходства или различия изучаемых объектов по каким-либо признакам. В основе операции лежит классификация сравниваемых понятий.

Операция сравнения может выполняться только для однородных объектов, входящих в определенный класс. Формирование такого класса объекта, а также определение состава существенных и отличительных признаков сравнения в ряде случаев представляет собой достаточно сложную интеллектуальную задачу.

**Анализ** (греч. analysis – разложение, расчленение) – процедура разложения объекта (предмета, явления, процесса) на составные части. Особую специфику представляет анализ технических объектов (ТО). Этому вопросу будет уделено особое внимание.

При анализе ТО можно выделить два подхода:

1. Мысленное или реальное разложение объекта на составные элементы. При этом выявляется структура объекта, т.е. состав элементов и отношения между ними, исследуются причинно-следственные связи между элементами.

Например, космический аппарат можно рассматривать как совокупность систем – системы двигательной установки, системы ориентации, управления научной аппаратурой, системы терморегулирования и др. Каждая система анализируется как автономный комплекс объектов определенного функционального назначения. Используя методы абстракции, можно описать элементы системы при помощи идеализированных моделей, определить оптимальные параметры каждой системы;

2. Разложение свойств и отношений объекта на составляющие свойства и отношения. При этом одни из них подвергаются дальнейшему анализу, а от других отвлекаются. Затем подвергаются анализу те свойства, от которых отвлекались. В результате понятия о свойствах и отношениях исследуемого объекта сводятся к более

общим и простым понятиям. Изолирующая абстракция является частным случаем такого анализа.

Примером может служить анализ трубопроводной системы, с одной стороны, как объекта, обладающего определенным гидравлическим сопротивлением, а с другой – как объекта, который не должен разрушаться при действии на него различных нагрузок.

**Синтез** (греч. *synthesis* – соединение, сочетание, составление) – метод научного исследования какого-либо объекта, явления, состоящий в познании его как единого целого, в единстве и взаимной связи его частей.

Синтез, с одной стороны, является методом познания, с другой – это метод практической деятельности. Процессы проектирования, конструирования определяются как операции синтеза. При этом новый полученный объект имеет существенно другое качество, чем элементы его составляющие. Это не сумма элементов, это более сложное взаимодействие.

Синтез является приемом, противоположным анализу. Вместе с тем оба приема предполагают и дополняют друг друга. Без анализа нет синтеза, без синтеза – анализа.

Например, при разработке космического аппарата как комплекса систем, анализ каждой системы и оптимизация ее параметров сопровождается исследованием совместной работы всех систем с учетом их взаимодействия.

**Индукция** (лат. *induction* – наведение) – операция мышления, основанная на обобщении эмпирической информации об устойчивой повторяемости признаков ряда явлений. Индуктивные умозаключения позволяют от отдельных фактов перейти к общему знанию.

Индуктивные умозаключения в большей степени способствуют получению новых знаний. История науки показывает, что многие научные открытия в физике, химии, биологии сделаны на основе индуктивного обобщения эмпирических данных.

В зависимости от полноты и законченности эмпирического исследования различают **полную и неполную индукцию**. При **полной индукции** на основе повторяемости признаков у каждого явления (объекта), относящегося к определенному классу, заключают о принадлежности этого признака всему классу. Это возможно в тех

случаях, когда исследователь имеет дело с замкнутыми классами, число элементов (объектов) в которых является конечными и легко обозримыми.

При неполной индукции на основе повторяемости признака у некоторых явлений, относящихся к определенному классу, заключают о наличии этого признака у всего класса явлений. При этом подразумевается, что сам класс сформирован по каким-либо другим признакам, а не тем, что анализируются.

Логический переход в неполной индукции от некоторых элементов ко всем элементам класса не является произвольным. Он оправдан устойчивыми эмпирическими основаниями. Однако, обобщение в этом случае носит вероятностный характер, и вывод может содержать ошибки. Например, большинство сталей и сплавов имеют положительный коэффициент термического расширения, причем значительно больший, чем у неметаллов. Но обобщающего вывода сделать нельзя, например, сплав инвар марки И-36, содержащий 36% Ni, при температуре от -50 до 100<sup>0</sup>С имеет коэффициент линейного расширения, близкий к нулю.

**Дедукция** (лат. *deduction* – выведение) – операция мышления, заключающая в том, что на основании общего знания выводятся частные положения. Дедуктивные умозаключения обладают высокой степенью доказательности и убедительности.

Дедуктивные рассуждений (от известных общих закономерностей) могут приводить к эффективным частным решениям. Например, известно, что усталостное разрушение конструкции от внешних нагрузок происходит в результате зарождения трещин в поверхностном слое. Трещины появляются в результате действия растягивающих напряжений. Отсюда вывод – если при изготовлении детали в поверхностном слое создать внутренние сжимающие напряжения, то можно повысить усталостную прочность конструкции.

**Абстракция** – это метод научного исследования, основанный на отвлечении от несущественных сторон и признаков рассматриваемого объекта. Абстракция позволяет упростить технический объект или процесс, заменить его моделью, т.е. другим эквивалентным в определенном смысле объектом (исходя из условий задачи) и исследовать эту модель.

Различают три типа абстракции:

- **Изолирующая** абстракция производится для вычленения и четкой фиксации исследуемого объекта по существенным признакам.

- **Обобщающая** абстракция применяется для получения общей картины процесса или явления. Например, в результате обобщения свойств электрических, пневматических, гидравлических машин, жидкостных реактивных двигателей, двигателей внутреннего сгорания возникает такая обобщающая абстракция как преобразователь энергии. Работу парового двигателя, двигателя внутреннего сгорания, ракетного двигателя, холодильника можно рассматривать с единых позиций термодинамики как работу тепловой машины.

- **Идеализирующая** абстракция заключается в замещении реального объекта идеализированной схемой для упрощения процесса его изучения. При идеализации объектов необходимо четко сформулировать **принятые допущения**.

Например, при расчете конструкции на прочность реальные шарнирные опоры заменяют идеальными, считая, что трение в опорах отсутствует. Следствием идеализации модели может стать превышение напряжений, действующих в реальной конструкции, над расчетными значениями. Поэтому в расчеты вводят коэффициенты безопасности.

Идеализирующая абстракция используется при мысленном конструировании понятий о несуществующих и, может быть, неосуществимых объектах, но имеющих прообразы в реальном мире. Например, точка (в реальном мире нет объекта, не имеющего измерений), прямая, инерция, абсолютно черное тело и др.

# 1. Основные задачи исследовательской работы

## 1.1. Задачи теоретических исследований

Цель – выявление существующих связей между исследуемым объектом и окружающей средой, объяснение и обобщение результатов эмпирических исследований, выявление общих закономерностей и их формализация.

В процессе теоретического исследования приходится непрерывно ставить и решать разнообразные по типам и сложности задачи в форме противоречий теоретических моделей, требующих разрешения.

Структурно любая задача включает **условия и требования**. **Условия** – это определенная информационная система, из которой следует исходить при решении задачи.

**Требования** – это цель, к которой нужно стремиться в результате решения.

Основные типы теоретических задач:

- обобщение результатов исследований, нахождение общих закономерностей путем обработки и интерпретации опытных данных;
- расширение результатов исследований на ряд подобных объектов без повторения всего объема исследований;
- изучение объекта, недоступного для непосредственного исследования;
- повышение надежности экспериментального исследования объекта (обоснования параметров и условий наблюдения, точности измерений).

## 1.2. Классификация экспериментальных исследований

Основной целью эксперимента является проверка теоретических положений (подтверждение рабочей гипотезы), а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования.

Различают эксперименты естественные и искусственные.

**Естественные эксперименты** характерны при изучении социальных явлений (социальный эксперимент) в обстановке, например, производства, быта и т.п.

**Искусственные эксперименты** широко применяются во многих естественнонаучных исследованиях. В этом случае изучают явления, изолированные до требуемой степени, чтобы оценить их в количественном и качественном отношении.

Рассмотрим классификацию экспериментальных исследований. Примем схему, в которой выделим следующие обобщенные признаки эксперимента:

- Структура;
- Стадия научных исследований, к которой относится эксперимент;
- Организация;
- Постановка задачи;
- Способ проведения.

**По структуре** эксперименты делят на **натурные, модельные и имитационные** (машинные).

В **натурном** эксперименте средства исследования непосредственно взаимодействуют с объектом исследования. В **модельном** эксперименте не с объектом, а с его заменителем – моделью. Модель при этом играет двойную роль. Во-первых, она является объектом экспериментального исследования. Во-вторых, по отношению к изучаемому объекту она является средством экспериментального исследования. **Имитационное** моделирование является разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики исследуемого объекта исследуются с помощью разработанных алгоритмов и программ моделирования. Данный вид эксперимента отличается универсальностью и обладает широкой областью применения.

**По стадии научных исследований** эксперименты делятся на **лабораторные, стендовые и промышленные**.

**Лабораторные эксперименты** служат для изучения общих закономерностей различных явлений и процессов, для проверки научных гипотез и теорий.

**Стендовые испытания** проводят при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте с

определенными физическими, химическими и др. свойствами. (например, наработка на отказ) По результатам стендовых испытаний судят о различных недоработках при создании нового объекта, а также вырабатывают рекомендации относительно серийного выпуска изделий и условий его эксплуатации. **Промышленный эксперимент** проводят при создании нового изделия или процесса по данным лабораторных и стендовых испытаний, при оптимизации существующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

**Лабораторные и стендовые** опыты проводят с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т.д. Эти исследования позволяют наиболее полно и доброкачественно, с требуемой повторяемостью изучить влияние одних характеристик при варьировании других. Лабораторные опыты в случае достаточно полного научного обоснования эксперимента (математическое планирование) позволяют получить хорошую научную информацию с минимальными затратами. Однако, такие эксперименты не всегда полностью моделируют реальный ход изучаемого процесса, поэтому возникает потребность в проведении производственного эксперимента.

**Производственные** экспериментальные исследования имеют целью изучить процесс в реальных условиях с учетом воздействия различных случайных факторов производственной среды. Пассивные производственные эксперименты заключаются в сборе данных и анализе случайных отклонений от заданных параметров процесса. В активных экспериментах изменения параметров процесса заранее планируют и задают.

Иногда возникает необходимость провести **поисковые экспериментальные** исследования. Они необходимы в том случае, если затруднительно классифицировать все факторы, влияющие на изучаемое явление вследствие отсутствия достаточных предварительных данных. На основе предварительного эксперимента строится программа исследований в полном объеме.

**С точки зрения организации эксперимента** можно выделить:

- обычные (рутинные) эксперименты,
- специальные (технические),
- уникальные,

- смешанные.

**Обычные эксперименты**, как правило, проводятся в лабораториях по несложным методикам с применением сравнительно простого экспериментального оборудования и сопряжены с однообразными измерениями и вычислениями.

**Специальные эксперименты** связаны с созданием и исследованием различных приборов и аппаратов (средства автоматики, элементы, узлы контрольно-измерительных систем).

**Уникальные эксперименты** проводятся на сложном экспериментальном оборудовании (типа ядерного реактора, новые виды судов, самолетов, автомобилей, исследования космоса). Они характеризуются большими объемами экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследуемых процессов, широким диапазоном изменения характеристик исследуемого процесса.

**Смешанные эксперименты** содержат совокупность разнотипных экспериментов, объединенных единой программой исследования и связанных друг с другом результатами исследований.

**По постановке задачи** необходимо учитывать уровень сложности исследуемого объекта, степень его изученности и требуемую степень детализации его описания.

**По способу проведения различают**

**пассивные,**

**активные,**

**активные с программным управлением,**

**активные с обратной связью,**

**активно-пассивные эксперименты.**

**Пассивный эксперимент** основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования без вмешательства в ход эксперимента. Обработка собранных экспериментальных данных осуществляется после окончания эксперимента. Обычно изменяется только один фактор при фиксированных значениях всех остальных.

При **активном эксперименте** предполагается возможность активного воздействия на объект исследования. Т.е. на вход объекта подаются возмущающие воздействия, на выходе регистрируются статические и динамические характеристики. При активном эксперименте можно оценить дисперсию ошибки, строго проверить



адекватность модели, выполнить множественный регрессионный анализ.

**Активный эксперимент с программой управления** проводится по заранее составленному плану. В соответствии с этим планом осуществляется воздействие экспериментатора на входные параметры и регистрируются выходные, что позволяет выяснить природу происходящих в объекте процессов.

В случае **активного эксперимента с обратной связью**, имея результаты эксперимента на каждом шаге, можно выбрать оптимальную стратегию управления экспериментом. Такие эксперименты можно проводить автоматически.

**Активно-пассивный** эксперимент характеризуется тем, что при его проведении одна часть данных регистрируется, а другая просто фиксируется и обрабатывается в процессе эксперимента. В таком эксперименте имеется 2 вида характеристик: одна часть – изменяющиеся под воздействием управляющих сигналов, вторая - не подверженные управляющим воздействиям.

Если эксперимент хорошо продуман и удачно спланирован, то он имеет больше шансов на успех. Основываясь на известных теориях и экспериментальных результатах, можно так выбрать способы и методы измерений, чтобы получить как можно больше сведений. Очень важно исключить влияние внешней среды или свести его к нулю.

Итак, **теория эксперимента включает три основных направления:**

**Первое** – подобие и моделирование. Отвечает на вопросы, какие величины следует измерять во время эксперимента и в каком виде обрабатывать результаты, чтобы выводы оказались справедливыми не для данного частного случая, но и для группы объектов или явлений.

**Второе** – математическое планирование эксперимента. Включает совокупность процедур для построения искомых зависимостей с минимальными затратами.

**Третье** – статистическая обработка данных эксперимента. Позволяет на основе данных, имеющих погрешности получить достоверные результаты.

Каждое из направлений является отдельной достаточно обширной, развивающейся областью знаний с фундаментальными исследованиями.

## 2. Общая характеристика объекта исследования

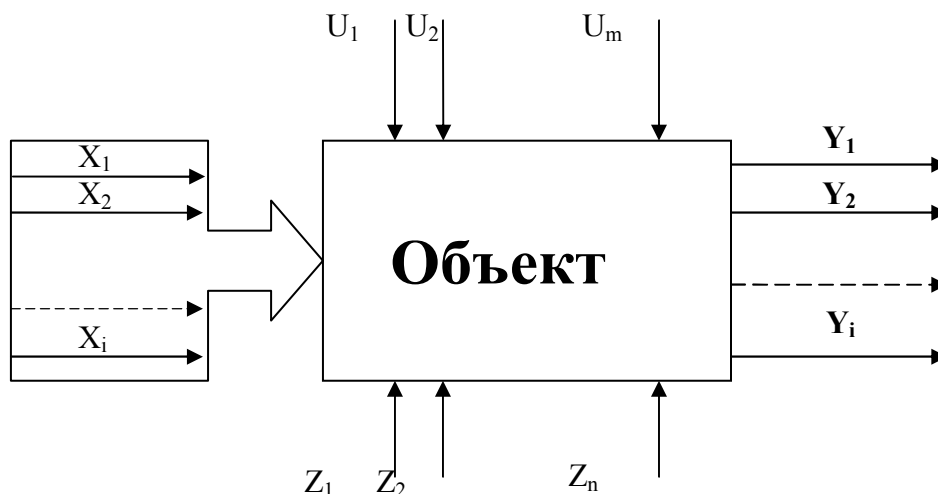
Условимся под объектом исследования понимать изолированное целое, содержащее совокупность процессов и средств их реализации.

Средства реализации – устройства контроля, управления и связи между ними и объектом.

Полностью изолированных объектов в природе не существует. Но тут необходимы методы абстрагирования и идеализации, для того, чтобы отсеять второстепенное и выделить главное, и представить объект исследования как условно изолированное целое.

Условимся, используя модель «черный ящик», предполагать, что внутренняя структура и характер связей между входными и выходными величинами исследователю неизвестны, о них он судит по значениям на выходе при определенных значениях на входе. Входные величины  $X$  условимся называть **факторами**, выходные  $Y$  **откликами**, параметрами, реакцией, целевой функцией.

Под входными величинами понимаем все, что оказывает влияние на выходные величины.



Правильный выбор параметров и факторов в значительной степени предопределяет успех исследования. Строго формализованной методики не существует, многое зависит от опыта экспериментатора, проникновения в сущность объекта исследования, знания теории эксперимента.

## 2.1. Параметры и предъявляемые к ним требования

В инженерном эксперименте в качестве параметров, как правило, принимаются экономические величины (приведенные затраты, себестоимость, производительность труда и т.п.) или технические показатели (к.п.д., расход энергии, производительность машины, давление, напряжение и т.д.).

К параметрам предъявляют следующие основные требования:

- должен быть количественным и оцениваться числом. Для качественных показателей используются ранговые и условные показатели оценки;
- параметр должен допускать проведение эксперимента при любом сочетании факторов. Недопустимо, чтобы при каком-то сочетании произошел взрыв или какая-либо другая форс-мажорная ситуация;
- данному сочетанию факторов с точностью до погрешности должно соответствовать одно значение параметра;
- параметр должен быть универсальным, т.е. характеризовать объект всесторонне;
- желательно, чтобы параметр имел простой экономический или физический смысл, просто и легко вычислялся;

Рекомендуется, чтобы параметр был единственным. Исследовать объект, строить математические зависимости можно для каждого параметра, но оптимизировать можно только по одному. Если параметров несколько, то целесообразно подходить к задаче постановки исследования как к многокритериальной задаче. В частности, исследователем выбирается один основной критерий – остальные выступают в виде ограничений. Есть и другие подходы – когда вводится единый критерий, например

$$\Phi = \beta_1 \Phi_1(A) + \dots + \beta_k \Phi_k(A)$$

А коэффициенты  $\beta_i \geq 0$ , обычно требуют, чтобы  $\sum \beta_i = 1$ . Единый критерий считается решающим, а коэффициенты  $\beta_i$  отражают важность каждого из составляющих критериев.

Есть, так называемый «метод уступок» – когда производится последовательная оптимизация всех критериев с назначением уступок по каждому критерию на соответствующем шаге оптимизации.

## 2.2. Факторы и предъявляемые к ним требования

**Фактором** является любая величина, влияющая на параметр и способная изменяться **независимо** от других.

Факторы можно разделить на следующие 3 группы:

- контролируемые и управляемые, которые можно изменять и устанавливать на заданном экспериментатором уровне ;
- контролируемые, но неуправляемые величины;
- неконтролируемые и неуправляемые (обусловленные случайными воздействиями, износом деталей).

Кроме независимости, к факторам предъявляются и другие требования:

- **операциональности** (факторы должны быть операционально определенными – т.е. в какой именно точке и каким прибором будут измеряться);
- **совместимость** – при всех сочетаниях значений факторов эксперимент будет безопасно выполнен;
- **управляемость** – экспериментатор устанавливает значение уровня по своему усмотрению;
- **точность** установления факторов должна быть существенно выше (по крайней мере на порядок) точности определения параметра.
- **однозначность** – означает непосредственность воздействия фактора (либо их комбинации-критерия подобия) на объект исследования.
- **фактор** должен быть **количественным**.

Группа U включает в себя контролируемые факторы, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. К ним можно отнести, например, условия окружающей среды, в которых проводятся эксперименты.

Группа Z образована контролируемыми и неконтролируемыми факторами. Они характеризуют возмущения, действующие на объект исследования, которые нельзя измерить количественно (например, неконтролируемые примеси в сырье, старение деталей и т.п.). Воздействие неконтролируемых факторов приводит к дрейфу характеристик во времени.

### 2.3. Основные свойства объекта исследования

**Основными свойствами объекта исследования являются:** сложность, полнота априорной информации, управляемость и воспроизводимость.

**Сложность** характеризуется числом состояний, которые в соответствии с целью исследований, можно различать при проведении исследований.

**Априорная** (информация известная до начала исследования). Обычно в исследованиях нуждаются объекты, информация о которых ограничена.

**Управляемость** – свойство, позволяющее изменять состояние объекта по усмотрению исследователя. В управляемых объектах можно изменять все входные величины. В частично управляемых системах можно ставить эксперимент, за неуправляемыми можно только наблюдать.

**Воспроизводимость** – свойство объекта переходить в одно и то же состояние при одинаковых сочетаниях факторов. Чем выше воспроизводимость, чем проще выполнять эксперимент и тем достовернее его результаты.

Прежде всего, необходимо определить, в чем именно заключается задача, так как реальные ситуации редко бывают четко очерчены. Процесс выделения «задачи», поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками (например, общения с коллегами-специалистами, работающими в данной области техники, чтение литературы, глубокое изучение вопроса).

Часто одновременно со стадией постановки задачи идет процесс выявления основных или существенных особенностей явления. Этот процесс схематизации (идеализации) играет решающую роль, поскольку в реальном явлении участвует множество процессов, и оно чрезвычайно сложно. Некоторые черты представляются важными, другие – несущественными.

Очевидно, математической моделью объекта, изображенного на рисунке, может служить совокупность соотношений вида

$$Y = f(x_i, y_j, z_k),$$

однако практически при построении модели такие соотношения получить невозможно. Приходится вводить ограничения, например, считать, что каждый из параметров может изменяться в определенных пределах, обусловленных верхней и нижней границами.

### 3. Моделирование и подобие

**Под моделированием** понимаем способ познания действительности с помощью моделей.

**Модель** – материальный или мысленный объект, отображающий основные свойства объекта-оригинала. Использование моделирования позволяет с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей.

**Мысленные** модели бывают наглядные, символические и математические.

К **наглядным** относятся мысленные представления, по ним могут создаваться иллюстрирующие их материальные объекты в виде наглядных аналогов, макетов.

**Символические** – имеют вид условно-знаковых представлений (географические карты, записи химических реакций и пр., состояния системы и пути переходов между ними, показанные в виде графов).

Наиболее важной моделью является **математическая**, в том числе **имитационная**. Суть заключается в том, что основные процессы, происходящие в объекте исследования, записываются в виде математических уравнений и соотношений. Математическая модель с помощью алгоритмов и программ может быть представлена в виде имитационной модели. В последнее время широкое распространение получают визуальные имитационные модели, которые также как и имитационные модели позволяют проводить экспериментальные исследования.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают аналитические (детерминированные) и статистические, или эмпирические модели. Аналитические модели, как правило, представляются в виде систем уравнений различных типов, позволяющих очень точно описывать процессы, протекающие в системе. Статистические модели получают в результате статистической обработки эмпирической информации, собранной на исследуемом объекте. Статистические модели имеют, как правило, относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью точек, в которых проводятся эксперименты.



Принято различать стационарные и динамические модели. Первые из них описывают не изменяющиеся во времени соотношения, характеризующие объект исследования. Вторые – переходные процессы, т.е. нестационарные состояния. И те, и другие модели могут относиться либо к статистическому, либо к физическому типу.

**Материальные модели** условно разделим на натурные и физические.

**Натурная модель** это сам объект исследования. На натурной модели можно проводить стендовые и производственные эксперименты.

**Физическая модель** характеризуется тем, что физическая природа протекающих в ней процессов аналогична природе процессов объекта-оригинала.

Если физическая модель подобна оригиналу, то поставленный на ней эксперимент через масштабные коэффициенты может быть пересчитан на натуру. Полученная при этом информация будет соответствовать результатам натурального эксперимента.

Исследование на физических моделях, например, позволяет ускорить или замедлить процессы, которые в реальных условиях протекают со скоростью, затрудняющей наблюдения. При проведении эксперимента на натуре в большинстве случаев приходится отказываться от активного поиска оптимальных конструктивных решений, что сопряжено со значительными материальными и временными затратами (например, в самолетостроении, кораблестроении, строительстве плотин и т.д.)

Сознательное использование моделей позволяет с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей.

Важнейшим требованием, предъявляемым к моделям, является их подобие объектам-оригиналам.

### **3.1. Построение моделей**

При построении математических или материальных моделей руководствуются следующими соображениями.

Первоначально из общего комплекса процессов, характеризующих объект, выделяют те, которые важны в данном

исследовании и отражают основные свойства оригинала (анализ и синтез модели исследования). Затем создают общую описательную модель выделенных процессов. Выполняют словесное описание, классификацию и систематизацию, выполняют предварительные статистические оценки.

На третьем этапе определяют параметры и устанавливают значимые факторы. С этой целью сложный объект разбивают на элементарные звенья. Для каждого звена определяют входные и выходные величины. Оценивают весомость каждого фактора, выделяют значимые и отбрасывают второстепенные.

На четвертом этапе создают математическую модель объекта. Для чего составляют уравнения, описывающие процессы в звеньях, устанавливают и записывают уравнения связей и соотношений, выбирают метод решения.

На заключительном этапе решают уравнения, наиболее подходящим способом.

**Натурные и физические можно создавать на основе математических моделей.**

### **3.2. Сущность подобия. Теоремы подобия**

Два элемента подобны, если характеристики одного могут быть получены путем пересчета характеристик другого.

Различают абсолютное и практическое подобие. Первое требует тождества всех процессов в объектах в пространстве и во времени. Второе же требует подобия только тех процессов, которые существенны для данного исследования.

Теория подобия нашла широкое применение, как средство, значительно уменьшающее трудовые и материальные затраты, сокращающее сроки проектирования и внедрение объектов в производство, позволяющее выбирать оптимальные (рациональные) значения геометрических, силовых и других параметров машин.

Более ста пятидесяти лет назад возникла новое направление научного знания – учение о подобии. В 1686 г. И.Ньютоном было высказано гениальное предвидение, а в 1848 г. Ж.Бертраном была сформулирована первая теорема подобия для механических систем о существовании инвариантов подобия. Исходя из математического выражения второго закона Ньютона, Бертран показал, что у

подобных явлений есть комплекс, имеющий одно и то же значение в сходственных точках подобных явлений. Этот комплекс называется **инвариантом**, или **критерием** механического подобия.

В общем случае различают три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое. Наиболее простым является подобие геометрическое, требующее, чтобы линейные размеры натуры и модели находились в постоянном соотношении, другими словами, модель повторяет натуру в каком-то масштабе.

Это требование можно записать в виде

$$\frac{L_n}{L_m} = k_L$$

где  $k_L$  - масштабный множитель.

Для площадей ( $S$ ) и объемов ( $V$ )

$$\frac{S_n}{S_m} = k_L^2; \quad \frac{V_n}{V_m} = k_L^3$$

Применительно к физическим явлениям элементарные представления геометрического подобия расширяются и распространяются на все величины, характеризующие данный процесс. Если учесть, что они могут изменяться как во времени, так и в пространстве, образуя поля, то возникает понятие о временном подобии и подобии полей, называемое кинематическим подобием.

В механике жидкости оно сводится к подобию полей скоростей в потоках, движущихся в геометрически подобных каналах.

И наконец, имея в виду, что механическое движение происходит под действием сил, вводится понятие динамического подобия, которое требует, чтобы в соответствующих точках натуры и модели силы находились в постоянном соотношении.

Рассмотрим простейший пример. Известно, что движение любой механической системы подчиняется закону Ньютона

$$F = m \frac{du}{dt} \quad (2.1)$$

Для двух подобных систем можно записать

$$F_1 = m_1 \frac{du_1}{dt_1} \quad \text{и} \quad F_2 = m_2 \frac{du_2}{dt_2}$$

Разделив первое на второе получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{du_1}{du_2} \frac{dt_2}{dt_1} \quad \text{либо} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{u_1}{u_2} \frac{t_2}{t_1}$$

Имея в виду, что  $m = \rho V \cong \rho L^3$  имеем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^3 u_1 t_2}{\rho_2 L_2^3 u_2 t_1}$$

По смыслу  $L/t$  есть скорость, поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^2 u_1^2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (2.2)$$

либо

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 u_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (2.3)$$

Очевидно, что полученные комплексы безразмерны.

Таким образом, для двух подобных систем сохраняется числовое равенство безразмерных комплексов  $\frac{F}{\rho L^2 u^2}$ . Кратко это условие

можно записать так:  $\frac{F}{\rho L^2 u^2} = \text{idem}$ . В честь Ньютона этот комплекс обозначается двумя первыми буквами его фамилии, т.е.

$$Ne = \frac{F}{\rho L^2 u^2} \quad (2.4)$$

и называют числом подобия Ньютона, а выражение  $Ne = \text{idem}$  - основным законом динамического подобия механических систем (законом Ньютона).

Величины  $L$  и  $u$ , входящие в (2.4), называются определяющим линейным размером и определяющей скоростью. При проведении опытов они выбираются экспериментатором произвольно, исходя из удобства их измерения.

Полученные результаты заслуживают того, чтобы остановиться и сделать кое-какие полезные выводы. Во-первых, они позволяют ответить на один из поставленных выше вопросов: как спроектировать и построить модель. Ответ очевиден: так, чтобы она была геометрически подобна натуре.

Во-вторых, из сказанного следует, что для обеспечения динамического подобия не требуется, чтобы все величины,

определяющие характер процесса в натурном объекте, были численно равны аналогичным величинам в модели. Достаточным является равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для природы и модели, называемых числами подобия.

Какие преимущества дает такой подход в практическом плане?

Из математической статистики известно, что число опытов, которое необходимо поставить для того, чтобы получить закономерность, достоверно описывающую какое-то физическое явление, определяется из соотношения:

$$N = \sigma^k \quad (2.5)$$

где  $\sigma$  - число экспериментальных точек, которое необходимо снять для обеспечения представительности опыта ( $\sigma_{\min} = 5$ );  $k$  - число величин, подлежащих варьированию в опытах.

Таким образом, минимальное число опытов

$$N = 5^k \quad (2.6)$$

Если в опытах варьируется число Ньютона (например, за счет изменения скорости), то  $k=1$  и  $N=5$ , но если изучать влияние каждой из величин ( $\rho$ ,  $u$ ,  $L$ ), то  $k=3$  и число опытов  $N=125$ . Следовательно, использование числа подобия в качестве своеобразной «обобщенной переменной» позволяет уменьшить число необходимых опытов в 25 раз, а если для надежности принять  $\sigma=10$ , то в 100 раз.

И наконец, в-третьих, можно ответить на вопрос о том, какие величины следует измерять в опытах и как переносить результаты на натуральный объект. Так как при проведении опытов необходимо обеспечить равенство чисел подобия природы и модели, то ясно, что измерению подлежат лишь те величины, которые входят в эти числа.

По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели и, исходя из равенства их числам подобия природы, произвести пересчет.

Остается открытым вопрос, который, по существу, является центральным. Как же найти числа подобия, характеризующие изучаемый процесс либо явление? Очевидно, что только ответ на него открывает путь для практической реализации теории подобия.

Ответ на этот вопрос дают основные **теоремы подобия**.

В природе существуют только те подобные явления, у которых критерии одинаковы. Это и есть **первая теорема подобия**, которая

носит имена **Ньютона и Бертрана**. *Для явлений, подобных в том или ином смысле, существуют одинаковые критерии подобия.*

Тотчас после вывода началось практическое применение первой теоремы для обработки опытных данных в так называемых критериях подобия. О.Рейнольдс выразил закон движения жидкости по трубам одной общей формулой, названной впоследствии критерием Рейнольдса. Оказалось возможным объединить таким путем все численные данные опытов по гидравлическому сопротивлению, проведенными различными исследователями на воде, воздухе, паре, различных маслах и т.д. Фруд, изучая мореходные качества судов на моделях, представил результаты опытов в виде критериального уравнения, которые можно было распространить на суда, подобные по своей геометрической конфигурации испытанным моделям. Выдающийся русский ученый Н.Е.Жуковский положил теорию подобия в основу критериальной обработки опытов над моделями самолетов, продуваемых в аэродинамической трубе, для того, чтобы результаты опытов можно было перевести на подобные моделям самолеты.

Если бы уравнение физического процесса можно было составить из инвариантов подобия, то это было бы общее уравнение, одинаковое для всех подобных явлений.

**Вторая теорема** подобия устанавливает возможность такого преобразования физических уравнений и носит имя американского ученого **Букингэма**. *Полное уравнение физического процесса, может быть представлено зависимостью между критериями подобия, т.е. зависимостью между безразмерными величинами, определенным образом полученных из уравнения процесса.*

Первая и вторая теоремы были выведены из предположения, что подобие явлений уже установленный факт. Обе теоремы устанавливают свойства подобных явлений, но они не указывают способа для определения подобия этих явлений. Возникает вопрос: по каким признакам можно определить подобие явлений.

Ответ дает **третья теорема** подобия, которая носит имена **М.В.Кирпичева и А.А.Гухмана**: *необходимыми и достаточными условиями для создания подобия является пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия сопоставляемых явлений.* К

условиям однозначности относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления:

- геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- физические параметры среды и тел, образующих систему;
- начальное состояние системы (начальные условия);
- условия на границах системы (граничные или краевые условия);
- взаимодействие объекта и внешней среды.

Процессы в объекте исследования описываются в общем случае системой дифференциальных уравнений связи между факторами и параметром. Необходимым условием подобия двух объектов является одинаковый вид системы уравнений. Только в этом случае характер процессов в объектах может быть одинаковым и их можно отнести к одному классу. Подобие кроме сходства систем уравнений предъявляет к объектам требования однозначности.

### 3.3. Критерии подобия, $\pi$ – теорема

**Критерии подобия** – безразмерные комбинации, которые составлены из физических величин, описывающих процессы в исследуемых объектах.

Принято обозначать критерии подобия буквой  $\pi$ . В соответствии с теорией подобия при экспериментах необходимо измерять все величины, входящие в критерий. Обрабатывать результаты следует в виде зависимостей между критериями подобия. Полученные таким образом зависимости будут справедливы не только для данного эксперимента, но и для всех подобных объектов.

Вторую теорему подобия часто называют  $\pi$  – теоремой. Однако  $\pi$ -теорема является более информативной и имеет прикладной характер.

В соответствии с  $\pi$ -теоремой, если процесс в объекте характеризуется  $m$  фундаментальными физическими величинами, для выражения размерностей которых используется  $k$  основных единиц, то этот процесс можно описать  $m-k$  безразмерными комбинациями, составленными из этих величин.

Из теоремы следуют два важных практических вывода:

**первый** – уравнения, описывающие физические процессы, могут быть выражены уравнениями связи между безразмерными комбинациями – критериями подобия. Последние уравнения будут справедливы для всех подобных объектов.

**второй** - число независимых критериев равно *m-k*. Оно меньше числа размерных физических переменных на число основных единиц. Т.е. речь идет об уменьшении числа переменных, которыми описывают процесс. Это в свою очередь ведет к уменьшению объема экспериментальных исследований и делает результаты более наглядными.



## 4. Основы математического планирования эксперимента

### 4.1. Историческая справка

До середины XVIII века вопросами организации эксперимента целиком занимались экспериментаторы. Уделом математиков была обработка уже проведенного эксперимента. Постепенно стало ясно, что речь должна идти не только об обработке экспериментальных данных, а об оптимальной процедуре математико-статистического анализа. Такие процедуры и были разработаны усилиями многих математиков. Основные этапы становления планирования эксперимента:

- метод наименьших квадратов – (А.Лежандр, К.Гаусс, конец 18-начало 19 века);

- основы регрессионного и корреляционного анализа (Ф.Гальтон, К.Пирсон, конец 19 - начало 20 века);

- концепция малых выборок (Госсет, более известный под псевдонимом «Стьюдент», начало 20 века);

- основы математического планирования эксперимента (Р.Фишер, середина 20 века);

- разработка последовательной стратегии экспериментирования, шаговая стратегия экспериментирования (Бокс и Уилсон)

Причем получается определенная сбалансированность между стремлением к минимизации числа опытов и уровнем точности и надежности полученных результатов. **Хорошо спланированный эксперимент обеспечивает оптимальную обработку результатов, и, следовательно, возможность четких статистических выводов.**

Однако, в основе статистических методов обработки данных (дисперсионный и регрессионный анализ) лежат определенные предпосылки о свойствах законов распределения случайных величин, их независимости, однородности дисперсий и т.д., что в реальных задачах выполняется далеко не всегда. Совокупность таких предпосылок принято называть **моделью ситуации**. Возникает вопрос: зачем оптимально планировать эксперимент, если нет уверенности в том, выполняются ли предпосылки принятой модели ситуации? В конце 70-х годах 20 века центр тяжести переместился на

проблему принятия решения при выборе модели ситуации и обработке данных. Так возникло новое направление, известное под названием **анализа данных**. Здесь можно выделить такие основные этапы, как

- проверка выполнимости предпосылок модели ситуации;
- использование априорной информации (байесовские методы);
- применение устойчивых (робастных) процедур в случае нарушения тех или иных предпосылок или невозможности их проверки.

Все это стимулирует в последнее время развитие робастных и непараметрических методов анализа. Таким образом, экспериментатор должен наилучшим образом выбрать модель ситуации, план эксперимента и метод обработки.

#### **4.2. Основные понятия и определения**

Под **экспериментом** будем понимать совокупность операций совершаемых над объектом исследования с целью получения информации об его свойствах

Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является **задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта**. Ее можно использовать и при анализе процессов и при проектировании объектов. Можно получить хорошо аппроксимирующую математическую модель, если целенаправленно применяется активный эксперимент. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации является **задача оптимизации**, т.е. нахождения такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный показатель оптимальности принимает экстремальное значение.

**Опыт** – это отдельная экспериментальная часть.

**План эксперимента** – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок проведения опытов.

**Планирование эксперимента** – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или

определения оптимальных условий). Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

В процессе измерений, последующей обработки данных, а также формализации результатов в виде математической модели, возникают погрешности и теряется часть информации, содержащейся в исходных данных. Применение методов планирования эксперимента позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то применение методов планирования эксперимента позволяет модернизировать математическую модель с проведением дополнительных опытов без потери предыдущей информации и с минимальными затратами.

**Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения опытов, при которых удастся получить надежную и достоверную информацию об объекте с наименьшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.**

Пусть интересующее нас свойство ( $Y$ ) объекта зависит от нескольких ( $n$ ) независимых переменных ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) и мы хотим выяснить характер этой зависимости -  $Y=F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , о которой мы имеем лишь общее представление. Величина  $Y$  – отклик, а сама зависимость  $Y=F(X_1, X_2, \dots, X_n)$  – функция отклика. Независимые переменные  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – факторы. Диапазоны изменения факторов задают область определения  $Y$ . Если принять, что каждому фактору соответствует координатная ось, то полученное пространство называется **факторным пространством**. При  $n=2$  область определения  $Y$  представляется собой прямоугольник, при  $n=3$  – куб, при  $n > 3$  - гиперкуб.

При выборе диапазонов изменения факторов нужно учитывать их совместимость, т.е. контролировать, чтобы в этих диапазонах любые сочетания факторов были бы реализуемы в опытах и не приводили бы к абсурду. Для каждого из факторов указывают граничные значения

$$X_{imin} \leq X_i \leq X_{imax}, i = 1, \dots, n.$$

Регрессионный анализ функции отклика предназначен для получения ее математической модели в виде уравнения регрессии

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n; B_1, B_2, \dots, B_m) + e,$$

где  $B_1, \dots, B_m$  – некоторые коэффициенты;  $e$  – погрешность.

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Инициатором применения планирования эксперимента является Рональд А. Фишер, другой автор известных первых работ – Френк Йетс. Далее идеи планирования эксперимента формировались в трудах Дж. Бокса, Дж. Кифера. В нашей стране - в трудах Г.К. Круга, Е.В. Маркова и др.

В настоящее время методы планирования эксперимента заложены в специализированных пакетах программных продуктов, например: StatGrafics, Statistica, SPSS, SYSTAT и др.

### 4.3. Представление результатов экспериментов

При использовании методов планирования эксперимента необходимо найти ответы на 4 вопроса:

- Какие сочетания факторов и сколько таких сочетаний необходимо взять для определения функции отклика?
- Как найти коэффициенты  $B_0, B_1, \dots, B_m$ ?
- Как оценить точность представления функции отклика?
- Как использовать полученное представление для поиска оптимальных значений  $Y$ ?

Геометрическое представление функции отклика в факторном пространстве  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется поверхностью отклика (рис.4.1).

При трех и более факторах задача становится практически неразрешимой. Если и будут найдены решения, то использовать совокупность выражений достаточно трудно, а часто и не реально.

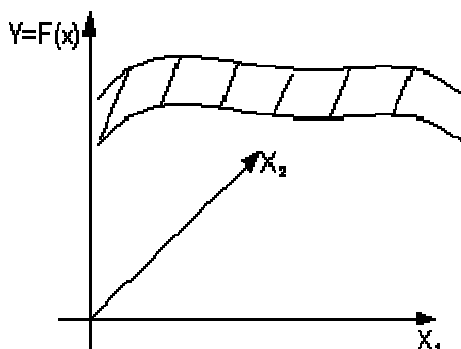


Рис. 4.1. Поверхность отклика

Например, пусть необходимо исследовать влияние скорости  $v$ , плотности движущейся жидкости и внутреннего диаметра трубопровода  $d$  на потери давления и расход жидкости  $Q$  при проектировании гидравлической сети (рис. 4.2).

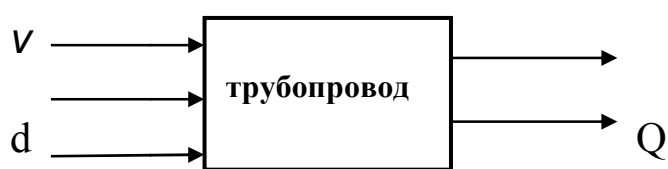


Рис.4.2. Исследование влияния факторов

Если в диапазоне изменения каждого фактора взять хотя бы по шесть точек

$v$	м/с	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	800	900	1000	1100	1200	1300
$d$	м	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175

то для того чтобы выполнить опыты при всех возможных сочетаниях значений факторов (их три) необходимо выполнить  $6^3=216$  опытов и сформировать по  $6^2=36$  кривых для каждой из двух функций отклика. Если мы хотим хотя бы продублировать опыты чтобы снизить погрешность, то число опытов пропорционально

возрастает, поэтому произвольное выполнение опытов при числе факторов более двух и использование их результатов - практически нереально.

#### 4.4. Разложение функции отклика в степенной ряд, кодирование факторов

Если заранее не известно аналитическое выражение функции отклика, то можно рассматривать не саму функцию, а ее разложение, например, в степенной ряд в виде полинома

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + \dots + B_n X_n + B_{12} X_1 X_2 + \dots + B_{nn-1} X_n X_{n-1} + B_{11} X_1^2 + \dots + B_{nn} X_n^2 + \dots$$

Разложение в степенной ряд функции возможно в том случае, если сама функция является непрерывной. На практике обычно ограничиваются числом членов степенного ряда и аппроксимируют функцию полиномом некоторой степени.

Факторы могут иметь разные размерности (А, В, Вт, об/мин) и резко отличаться количественно. В теории планирования эксперимента используют кодирование факторов.

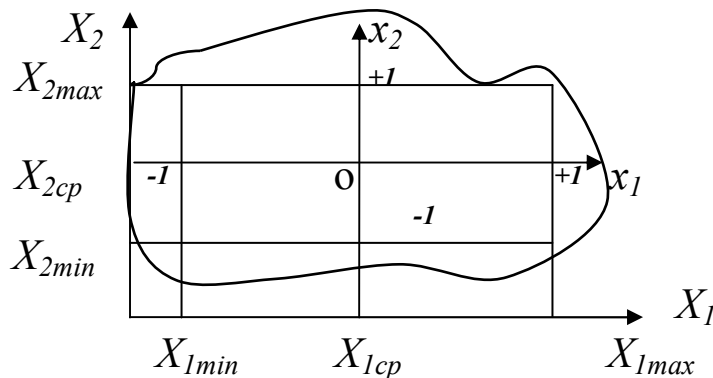


Рис. 4.3. Пространство кодированных факторов

Эта операция заключается в выборе нового масштаба для кодированных факторов (рис. 4.3), причем такого, чтобы минимальное значение кодированных факторов соответствовало “-1”, а максимальное значение “+1”, а также в переносе начала координат в точку с координатами  $X_{1cp}, X_{2cp}, \dots, X_{ncp}$

$$X_{icp} = \frac{X_{imin} + X_{imax}}{2} .$$

Текущее значение кодированного фактора

$$x_i = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{icp} - X_{imin}} = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{imax} - X_{icp}} = \frac{2X_i - X_{imax} - X_{imin}}{X_{imax} - X_{imin}} , \quad (4.1)$$

где  $X_i$  – именованное (абсолютное) значение фактора;  $x_i$  – кодированное значение фактора;  $X_{icp} - X_{imin} = X_{imax} - X_{icp}$  – интервал варьирования фактора.

Граница совместимости факторов указана на рис. 4.3 в виде кривой линии.

Если фактор изменяется дискретно, например он является качественным, то каждому уровню этого кодированного фактора присваиваются числа в диапазоне от +1 до -1. Так при двух уровнях это +1 и -1, при трех уровнях +1, 0, -1 и т.д.

Функция отклика может быть выражена через кодированные факторы  $Y=f(x_1, \dots, x_n)$  и записана в полиномиальном виде

$$Y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n+b_{12}x_1x_2+\dots+b_{nn-1}x_{n-1}x_n+b_{11}x_1^2+\dots+b_{nn}x_n^2+\dots \quad (4.2)$$

Очевидно, что  $B_i \neq b_i$ , но

$$Y=F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

*Для полинома, записанного в кодированных факторах, степень влияния факторов или их сочетаний на функцию отклика определяется величиной их коэффициента  $b_i$ . Для полинома в именованных факторах величина коэффициента  $B_i$  еще не говорит однозначно о степени влияния этого фактора или их сочетаний на функцию отклика.*

**Задача определения коэффициентов уравнения регрессии.** Для определения  $m+1$  коэффициента полинома необходимо не менее  $m+1$  уравнений (опытов).

Полученные коэффициенты  $B$  позволяют сформировать уравнение функции отклика при  $m+1$  членах уравнения. Если точность этого уравнения оказалась недостаточной, то требуется взять уравнение с большим числом членов и начать все заново так как все коэффициенты  $B$  оказываются зависимыми друг от друга. Это возникает при использовании пассивного эксперимента. Однако если целенаправленно использовать активный эксперимент и особым образом построить матрицу сочетаний факторов в опытах  $X$ , использовать планирование эксперимента, то коэффициенты полинома определяются независимо друг от друга.



Стратегия применения планов заключается в принципе постепенного планирования – постепенного усложнения модели. Начинают с простейшей модели, находят для нее коэффициенты, определяется ее точность. Если точность не удовлетворяет, то планирование и модель постепенно усложняются.

#### 4.5. Полный факторный эксперимент

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом (ПФЭ). При двух уровнях имеем ПФЭ типа  $2^k$ . Число опытов для данного случая будет равно

$$N = 2^k$$

Условие эксперимента записываются в виде таблицы. Строки её соответствуют различным опытам (вектор-строка), столбцы - значениям факторов в кодированном виде (вектор-столбцы). Такие таблицы называются **матрицами планирования эксперимента (МПЭ)**.

Составим МПЭ для двумерной модели на двух уровнях  $2^2$  (табл.4.1). Число опытов  $N=2^2=4$ .

Таблица 4.1

Опы	$x_1$	$x_2$	$y$
1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	$y_2$
3	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	$y_4$

План эксперимента можно представить геометрически (рис.4.4.). Для плана  $2^2$  каждая комбинация факторов представляет собой вершину квадрата.

В области определения факторов находят точку соответствующую основному уровню, Через эту точку проводят новые оси координат, параллельно осям натуральных значений факторов. Затем выбирают масштабы по новым осям для каждого фактора согласно выражению (4.1).

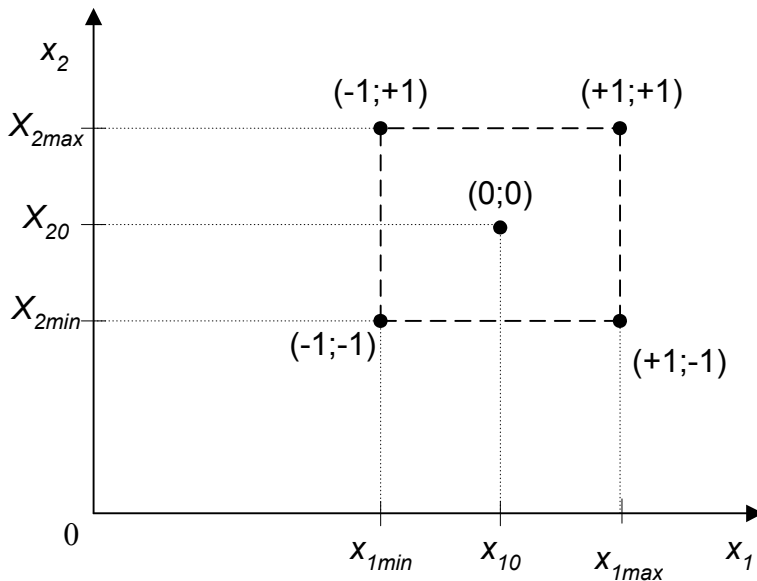


Рис. 4.4. Геометрическое представление ПФЭ

В матрицу ПФЭ вводится фиктивный столбец  $x_0$  для учета свободного члена  $\beta_0$ .

Коэффициенты  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  оцениваются согласно выражений

$$b_0 = \frac{\sum y_i}{N}, b_1 = \frac{\sum x_{1i} y_i}{N}, b_2 = \frac{\sum x_{2i} y_i}{N}.$$

#### 4.6. Свойства полного факторного эксперимента $2^k$

К свойствам ПФЭ относятся те, которые определяют качество модели, т.е. эти свойства делают оценки коэффициентов модели наилучшими. Первые два свойства вытекают из построения матрицы.

**Симметричность** относительно центра эксперимента. Алгебраическая сумма элементов столбца каждого фактора равно нулю  $\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0$ , где  $j$ - номер фактора,  $N$  - число опытов.

**Условие нормировки.** Сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов  $\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N$ .

**Ортогональность** матрицы. Сумма почленных произведений любых двух векторов-столбцов матрицы равна нулю  $\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} = 0$ , где  $j \neq u; j, u = 0, 1, \dots, k$ .

Ортогональные планы делают эксперимент более эффективным.

Ортогональность плана позволяет получить оценки для коэффициентов уравнения регрессии независимые друг от друга. Иными словами ортогональность характеризует отсутствие

корреляции между факторами. Однако, если имеет место нелинейность, то столбцы взаимодействий окажутся неразличимы, закоррелированными с некоторыми столбцами линейных эффектов. Это приводит к тому, что по результатам данного эксперимента становится невозможным разделить коэффициенты регрессии между линейными и нелинейными факторами.

**Рототабельные** планы - это такие планы, для которых дисперсия  $\hat{y}$  одинакова для всех точек пространства переменных  $x$ , лежащих на одинаковых расстояниях от центра (все точки плана лежат на окружности (сфере, гиперсфере), центр которой совпадает с центром плана).

#### 4.7. Выбор модели при проведении полного факторного эксперимента

Планируя эксперимент на первом этапе, всегда стремятся получить линейную модель. Для двух факторов модель представляют в виде выражения (4.2). Однако не всегда экспериментатор имеет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью. Часто встречающийся вид нелинейности связан с эффектом взаимодействия между факторами. ПФЭ позволяет оценить кроме коэффициентов при линейных эффектах коэффициенты взаимодействия. Для этого перемножают соответствующие столбцы. Тогда уравнение принимает вид

$$y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \quad (4.3)$$

Матрица полнофакторного эксперимента с учетом фактора взаимодействия для ПФЭ  $2^2$  показана в табл.4.2.

Таблица 4.2

Опы	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$y$
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Коэффициенты уравнений регрессии оцениваются следующим образом:

$$\beta_0 \rightarrow b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \beta_j \rightarrow b_j = \frac{\sum x_{ji} y_i}{N}, \beta_{12} \rightarrow b_{12} = \frac{\sum x_{j1} x_{u2} y_i}{N}, j \neq u$$

По столбцам  $x_1$  и  $x_2$  осуществляют планирование, что же касается столбцов  $x_0$  и  $x_1x_2$ , то они служат только для расчета.

Нахождение модели методом ПФЭ состоит из следующих этапов:

- Выбор модели
- Планирование эксперимента
- Экспериментирование.
- Проверка однородности дисперсии (воспроизводимости).
- Проверка значимости коэффициентов.
- Проверка адекватности модели.

При составлении матрицы ПФЭ руководствуются следующими правилами:

- располагают, если имеется соответствующая информация, факторы в матрице в порядке убывания степени их влияния на целую функцию;
- стремятся выполнить требования рандомизации варьирования уровней;
- при составлении матрицы уменьшают частоту чередования уровней при переходе от  $x_1$  к  $x_2$ , от  $x_2$  к  $x_3$  и т.д. каждый раз вдвое.

Рассмотрим пример составления МПЭ для трех факторного полного эксперимента. В качестве уравнения регрессии берем неполную квадратичную модель.

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i<j}^3 b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

Введем обозначение переменных  $x$  через  $z$ , тогда

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^7 b_i z_i \quad (4.4)$$

где  $\sum_{i=1}^3 b_i x_i = \sum_{i=1}^3 b_i z_i$ ,  $\sum_{i<j}^3 b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=4}^6 b_i z_i$ ,  $b_{123} x_1 x_2 x_3 = b_7 z_7$ .

Составим МПЭ.  $N = 2^3 = 8$  (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	Код. обозначение
	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

В зависимости от соотношения от числа неизвестных коэффициентов уравнения регрессии числа строк в плане ПФЭ  $2^n$  может являться **насыщенным**, при выборе числа членов уравнения  $m+1=N$ , **ненасыщенным**, при выборе числа членов уравнения и соответственно числа столбцов плана  $m+1 < N$  и **сверхнасыщенным**  $m+1 > N$ .

#### 4.8. Дробный факторный эксперимент

Во многих реальных процессах некоторые факторы взаимодействия могут отсутствовать. И тогда ПФЭ будет обладать избыточностью опытов.

Рассмотрим пути минимизации числа опытов.

Обратимся к уравнению (4.2). Если мы располагаем сведениями о том, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента  $b_0, b_1, b_2$ . В результате остается одна степень свободы, т.к. имеем четыре опыта, а количество констант три. Используем эту степень свободы для минимизации числа опытов. При линейном приближении  $b_{12} \rightarrow 0$  и тогда вектор-столбец  $x_1 x_2$  может быть использован для нового фактора  $x_3$ .

Таблица 4.4

Опыт	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	+1	+1	+1	+1	$y_1$
2	+1	-1	+1	-1	$y_2$
3	+1	+1	-1	-1	$y_3$
4	+1	-1	-1	+1	$y_4$

При этом эксперименте появляются смешанные оценки

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}, b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}, b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}, \quad (4.5)$$

т.е. столбцы.

**Пример.** Допустим  $x_1$  и  $x_2 x_3$  между собой неразличимы. Однако парные взаимодействия в линейной модели незначительны. Зато вместо восьми опытов для изучения влияния трех факторов можно поставить только четыре опыта, т.е. вместо ПФЭ  $2^3$  мы имеем  $2^3-1$ . В теории эксперимента  $2^3-1$  называют полурепликой. В общем случае имеют дело с дробной репликой. А факторный эксперимент называют дробным (ДФЭ).

Для составления МПЭ ДФЭ вводится понятие **определяющего контраста**, который позволяет определить какие оценки смешаны

друг с другом, не изучая МПЭ для выявления совпадающих столбцов. Для этого используется символическое обозначение произведения столбцов равного +1 или -1. Это и называют контрастом. Чтобы определить какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту.

**Пример.** Пусть имеем три фактора  $x_1, x_2, x_3$ . При построении полуреплики  $2^3-1$  имеется только две возможности приравнять  $x_3$  либо к « $+x_1x_2$ », либо к « $-x_1x_2$ » (табл.4.5).

Таблица 4.5

Опыт	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2x_3$	Опыт	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2x_3$
1	-1	-1	+1	+1	1	-1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1	+1	2	+1	-1	+1	-1
3	-1	+1	-1	+1	3	-1	+1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1	4	+1	+1	-1	-1

Возьмем в качестве определяющего контраста  $-1 = x_1x_2x_3$ . Тогда  $-x_1 = x_1^2x_2x_3$ . Учитывая, что  $x^2 = 1$  получаем  $x_1 = -x_2x_3$ .

Теперь возьмем за определяющий контраст  $+1 = x_1x_2x_3$ . Получаем:  $x_1 = x_2x_3, x_2 = x_1x_3, x_3 = x_1x_2$ . Эти выражения показывают, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками (4.5).

Соотношение, показывающее с какими из эффектов смешан данный эффект, называется **генерирующим соотношением**.

При выборе полуреплики  $2^4-1$  возможны восемь генерирующих соотношений:

$$\begin{array}{ll}
 x_4 = x_1x_2 & x_4 = x_1x_3 \\
 x_4 = -x_1x_2 & x_4 = -x_1x_3 \\
 x_4 = x_2x_3 & x_4 = x_1x_2x_3 \\
 x_4 = -x_2x_3 & x_4 = -x_1x_2x_3
 \end{array}$$

Разрешающая способность этих полуреplik различна. Реплики 1-6 имеют по три фактора и носят название планов с расширяющей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Реплики 7-8 имеют по четыре фактора и обладают максимальной разрешающей способностью. Их называют главными репликами. Всегда стремятся выбрать реплику с наибольшей разрешающей способностью, т.к. чем больше эффектов взаимосвязано, тем точнее окажется полученная модель.

Однако, если имеется информация об эффектах взаимодействия, то реплики нужно выбирать с ее учетом.

Реализация МПЭДФЭ ничем не отличается от реализации МПЭПФЭ. Методика оценки значимости коэффициентов и проверка адекватности модели проводится также как и в ПФЭ.

#### 4.9. Обобщающий определяющий контраст

Рассмотрим на примере исследование модели с пятью факторами. Возьмём реплику  $2^5-2$ . Получаем 8 опытов вместо 32.

Возможны 12 решений, если приравнять  $x_4$  парному взаимодействию, а  $x_5$  - тройному.

$x_4 = x_1 x_2$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = x_1 x_2$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_1 x_2$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_1 x_2$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$
$x_4 = x_1 x_3$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = x_1 x_3$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_1 x_3$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_1 x_3$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$
$x_4 = x_2 x_3$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = x_2 x_3$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_2 x_3$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$
$x_4 = -x_2 x_3$	$x_5 = -x_1 x_2 x_3$

Допустим, выбран первый вариант. Тогда определяющими контрастами будут:  $1 = x_1 x_2 x_4$ ,  $1 = x_1 x_2 x_3 x_5$ . Перемножим эти определяющие константы, получим третье соотношение:  $1 = x_3 x_4 x_5$ . Для того чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, вводят понятие обобщающего определяющего контраста:  $1 = x_1 x_2 x_4 = x_3 x_4 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_5$ .

Система смешивания столбца определяется умножением обобщающего определяющего контраста последовательно на  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2 x_4 = x_1 x_3 x_4 x_5 = x_2 x_3 x_5; \\
 x_2 &= x_1 x_4 = x_2 x_3 x_4 x_5 = x_1 x_3 x_5; \\
 x_3 &= x_1 x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_1 x_2 x_5; \\
 x_4 &= x_1 x_2 = x_3 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5; \\
 x_5 &= x_1 x_2 x_4 x_5 = x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3; \\
 x_1 x_2 &= x_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = x_3 x_5.
 \end{aligned}$$

Если при выбранной реплике некоторые коэффициенты получаются отличными от нуля, например:

$$b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_4 + \beta_{35} + \beta_{12345}$$

то ставят вторую серию опытов с другой репликой, например берут вариант 4.

Дробные реплики находят широкое применение при получении линейных моделей, причем, целесообразность применения их возрастает с ростом количества факторов. Эффективность применения дробных реплик зависит от выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия.

#### 4.10. Планирование экспериментов при построении квадратичной модели

В уравнениях (4.3),(4.4) учитывались только линейные эффекты и эффекты взаимодействия. В некоторых случаях существенными могут оказаться коэффициенты при квадратичных переменных, их кубов и т.д.

Для двухфакторного эксперимента модель может быть представлена выражением

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 \quad (4.5)$$

Полученные вектор - столбцы  $x_1^2$  и  $x_2^2$  являются единичными столбцами, совпадающие друг с другом и с фиктивным столбцом  $x_0$ . Эти столбцы неразличимы, поэтому нельзя сказать за счет чего получилась величина  $b_0$ . Очевидно, она включает в себя значения свободного члена  $\beta_0$  и вклады квадратичных членов. Символически это можно записать:

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_{ii}$$

Для квадратичной модели получается следующая система смешивания:

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{11} + \beta_{22}, b_1 \rightarrow \beta_1, b_2 \rightarrow \beta_2, b_{12} \rightarrow \beta_{12}.$$

Следовательно, планирование эксперимента на двух уровнях не дает возможности получить отдельные оценки коэффициентов при квадратичных членах и фиктивной переменной  $x_0$ .

Согласно теории интерполяции, для решения задачи нахождения отдельных оценок число уровней каждой из независимых переменных должно быть на единицу больше степени



интерполяционного полинома. Для полинома второй степени число уровней должно быть равно трем.

Однако применение методов ПФЭ плана  $3^n$  не является рациональным из-за резкого увеличения опытов эксперимента. Поэтому разработаны специальные методы построения планов второго порядка.

Например, в качестве двухфакторных планов второго порядка могут служить планы, представляемые вершинами и, по крайней мере, одной центральной точкой любого  $(n-1)$  мерного правильного многоугольника (который можно вписать в круг).

Пример. Имеем восьмиугольный план (рис.4.5, табл.4.6).

Этот пример можно обобщить на случай получения планов второго порядка. Для этого к ПФЭ типа  $2^n$  добавляется центральная точка с координатами  $(0,0,\dots,0)$  и, так называемые, звёздные точки с координатами  $(0,0,\dots, \pm \alpha, \dots, 0)$ , лежащие на сфере диаметра  $2\alpha$ . Т.е. план ПФЭ достраивается до плана второго порядка. Такой план называется композиционным планом.

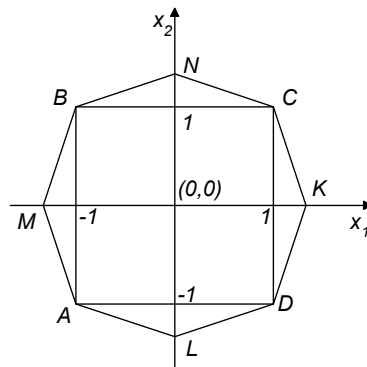


Рис.4.5. Восьмиугольный план эксперимента

Таблица 4.6

Опыт	$x_1$	$x_2$	Описание
1	-1	-1	План $2^2$ представлен квадратом ABCD
2	+1	-1	
3	-1	+1	
4	+1	+1	
5	$\sqrt{2}$	0	План представлен звёздными точками MNKL
6	$-\sqrt{2}$	0	
7	0	$\sqrt{2}$	
8	0	$-\sqrt{2}$	
9	0	0	Центральная точка

Добавление двух сфер, образованных звездными точками и центральной точкой, к ПФЭ позволяет получить отдельные оценки  $b_0$  и  $b_{ii}$ . Все три сферы образуют композиционный план второго порядка.

В зависимости от критерия оптимальности плана, различают ортогональное, композиционное планирование и рототабельное композиционное планирование.

План, приведенный в табл. 4.6, является рототабельным и обеспечивает получение отдельных оценок  $b_0$  и  $b_{ii}$ .

#### **4.11. Ортогональное центральное композиционное планирование**

Критерием оптимальности является ортогональность столбцов матрицы планирования. В силу этого свойства все коэффициенты модели определяются независимо друг от друга.

Анализ результатов экспериментов при ортогональном композиционном планировании имеет некоторые особенности. Так оценки коэффициентов уравнения регрессии находятся с неодинаковой дисперсией.

Из-за неодинаковой дисперсии коэффициентов регрессии критерий ортогональности является недостаточно сильным критерием оптимальности для планирования второго порядка. Поэтому точность предсказания выходной величины в различных направлениях факторного пространства неодинакова.

Лучшим методом планирования является такой метод, который обеспечивает одинаковую точность во всех направлениях на одинаковом расстоянии от центра. Таким методом является рототабельное композиционное планирование.

#### **4.12. Рототабельное композиционное планирование**

Критерием оптимальности в рототабельном планировании является условие  $\sigma_y^2 = const$  при одинаковом удалении точек эксперимента от центра, т.е.  $R = const$ .

Если имеются двухфакторные планы, то, как уже было отмечено, типичными примерами рототабельных планов являются планы, представляемые вершинами и, по крайней мере, одной центральной

точкой любого  $(n-1)$  - мерного правильного многоугольника, который можно вписать в круг (рис.4.8).

Композиционные центральные рототабельные планы также как и ортогональные состоят из трех сфер: сфера нулевого радиуса - центральные точки; сфера точек куба или гиперкуба и сфера звездных точек. Равномерность расположения точек на сфере приводит к вырожденным матрицам. Для устранения вырожденности используют сферу нулевого радиуса с несколькими центральными точками.

Таблица 4.7

$n$	$\alpha$	$N\alpha$	$N_0$	$N_c$	$N$
2	1,414	4	5	4	13
3	1,682	6	6	8	20
4	2	8	7	16	31

где  $N_\alpha$  - число звездных точек;  $N_0$  - число точек в центре эксперимента;  $N_c$  - количество точек куба (гиперкуба);  $N$  - общее число точек факторного пространства.

Матрица планирования рототабельного плана второго порядка для трехфакторного эксперимента будет представлена в таблице 4.8.

Таблица 4.8

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_{12}$	$x_{22}$	$x_{32}$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$
	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$	$z_9$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1
6	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1
7	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
9	+1	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
10	+1	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
11	+1	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
12	+1	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
13	+1	0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0
14	+1	0	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Эксперимент проводится аналогично ПФЭ, однако оценки коэффициентов рассчитываются по своим формулам:

$$b_0 = \frac{A}{N} [2\lambda^2 (n+2) \sum_{j=1}^N x_{j,0} \bar{y}_j - 2\lambda C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N x_{j,i} \bar{x}_j]$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N} \left\{ C^2 [(n+2)\lambda - n] \sum_{j=1}^N x_{j,i} \bar{y}_j + C^2 (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N x_{j,i} \bar{x}_j - 2\lambda C \sum_{j=1}^N x_{j,0} \bar{y}_j \right\}$$

$$b_i = \frac{C}{N} \sum_{j=1}^N x_{j,i} \bar{y}_j \quad b_{ij} = \frac{C^2}{N\lambda} \sum_{u=1}^N x_{ui} x_{uj} \bar{y}_u$$

$$C = \frac{N}{\sum_{j=1}^N x_{j,i}}, \quad A = \frac{1}{2\lambda[(n+2)(\lambda-n)]}, \quad \lambda = \frac{nN \sum_{w=1}^k N_w P_w}{(n+2)(\sum_{w=1}^k N_w P_w^2)^2}$$

где  $N_w$  - число точек на сфере радиуса  $P_w$ ;  $k$  - число сфер ( $k=3$ ).

Проводится проверка значимости коэффициентов по t - критерию Стьюдента. Оценки дисперсии и коэффициентов вычисляются по формулам:

$$S_{b_0}^2 = \frac{2A\lambda^2(n+2)S_y^2}{NP}$$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{A[(n+1)\lambda - (n-1)]C^2 S_y^2}{NP}$$

$$S_{b_{ij}}^2 = \frac{C^2 S_y^2}{\lambda NP}$$

Проверка адекватности модели проводится методом Фишера (будет рассмотрен ниже).

#### 4.13. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий

Во многих случаях инженерной практике перед исследователем ставится задача не только выявления связи между рядами наблюдений, но и нахождение таких численных значений факторов при которых отклик (выходной параметр) достигает своего экстремального значения. Эксперимент, решающий эту задачу, называется **экстремальным**. В этом случае задача сводится к оптимизационной и формулируется следующим образом: требуется определить такие координаты экстремальной точки  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$  поверхности отклика  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , в которой она максимальна (минимальна).

Разработано множество методов пошаговой оптимизации, мы же рассмотрим некоторые, которые эффективно используются в промышленном и лабораторном эксперименте.

#### 4.13.1 Метод покоординатной оптимизации

Процесс поиска оптимума методом покоординатной оптимизации для двухмерного случая представлен на рис.4.12. По этому методу выбирается произвольная точка  $M_0$  и определяются ее координаты. Поиск оптимума осуществляется поочередным варьированием каждого из факторов. При этом сначала изменяют один фактор ( $x_1$ ) при фиксированных остальных до тех пор, пока не прекращается прирост функции отклика (точка  $M_1$ ). В дальнейшем изменяется другой фактор ( $x_2$ ) при фиксированных остальных, и далее процедура повторяется.

Данный метод весьма прост, однако при большом числе факторов требуется значительное число опытов, чтобы достичь координат оптимума. Однако, в некоторых случаях (см. рис.4.6) этот метод может привести к ложному результату. Поэтому далее рассмотрим более совершенные методы.

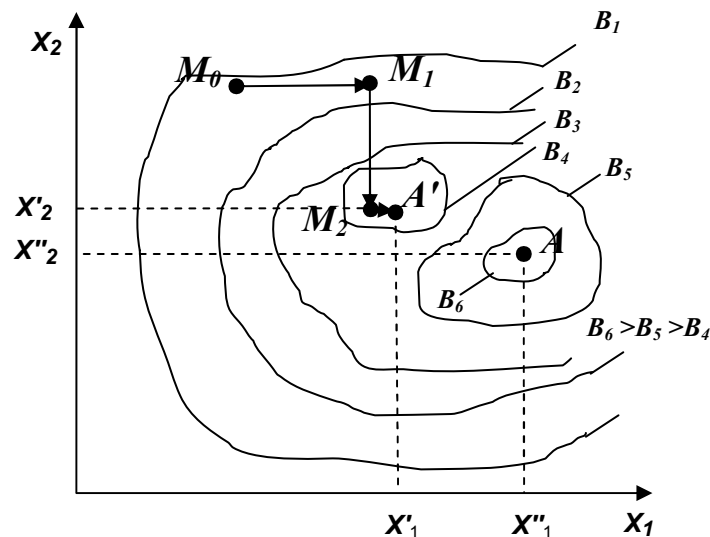


Рис.4.6. Поиск оптимума методом покоординатной оптимизации

### 4.13.2. Метод крутого восхождения

Известно, что кратчайший путь – это движение по градиенту, т.е. перпендикулярно касательным к линиям уровня, на которых функция отклика принимает постоянные значения

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = B$$

В связи с этим при оптимизации рабочее движение целесообразно совмещать в направлении наиболее быстрого возрастания функции отклика, т.е. в направлении градиента функции. Существует несколько модификаций градиентного метода, одним из них является **метод крутого восхождения**. Сущность его отражена на рис.4.7.

В этом случае шаговое движение осуществляется в направлении наискорейшего возрастания функции отклика, т.е.  $\text{grad } y(x_1, x_2)$ . Однако направление корректируется не после следующего шага, а при достижении в некоторой точке на данном направлении частного экстремума функции отклика.

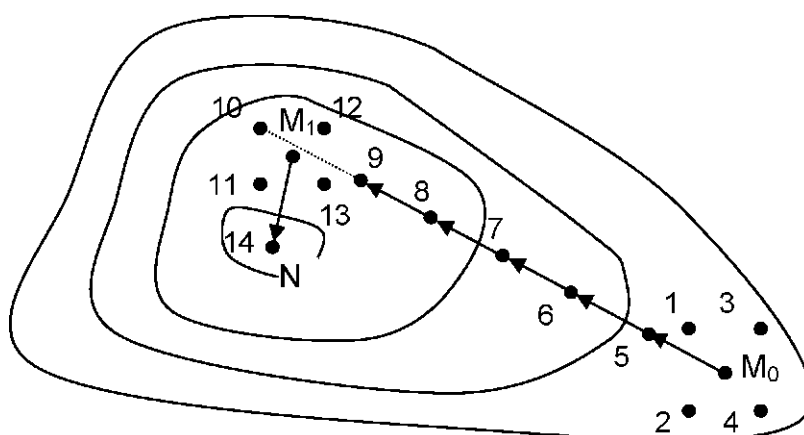


Рис. 4.7. Процедура оптимизации методом крутого восхождения.

Пусть в окрестности точки  $M_0$ , как центра плана, поставлен ПФЭ  $2^2$ . Координаты отдельных опытов соответствуют точкам 1-4. По результатам ПФЭ можно рассчитать коэффициенты линейного уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

После чего можно найти градиент

$$\text{grad } y = \frac{\partial y}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x} \vec{j}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1, \frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2$$

Для движения по градиенту необходимо изменять факторы пропорционально их коэффициентам регрессии в сторону, соответствующую знакам коэффициентов. В процессе поиска двигаются в этом направлении, пока не будет найден локальный максимум (т.М<sub>1</sub>). после чего находят направление градиента, осуществляя ПФЭ, и далее процедура повторяется.

Практически алгоритм сводится к следующей последовательности операций:

1. Планирование и постановка ПФЭ (или ДФЭ) в окрестности точки начального состояния (М<sub>0</sub>). Расчет коэффициентов линейной регрессии; определении направления градиента.

2. Расчет произведений  $b_i \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i$  - интервал варьирования факторов при ПФЭ (ДФЭ).

3. Выбор базового фактора  $x_i = x_{i0}$ , у которого  $b_i \Delta x_i = a = \max$

4. Выбор шага крутого восхождения для базового фактора  $h_a$  производится на базе априорной информации и опыта исследователя. Следует учесть, что слишком малый шаг потребует значительного числа опытов, а большой – создает опасность проскакивания области оптимума.

5. Расчет шагов изменения других факторов по формуле:  $h_i = (b_i \Delta x_i) h_a / a$ . Это соотношение между величинами шагов изменения отдельных факторов обеспечивает движение по градиенту в факторном пространстве.

6. Составление плана движения по градиенту: в соответствии с определенными значениями шагов изменения факторов  $x_{ik} = x_{i0} + kh_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Находят координаты опытов 5, 6, 7. Часть этих опытов проводят «мысленно». «Мысленный» опыт заключается в

получении предсказанных (расчетных) значений функции отклика по линейному уравнению регрессии, что позволяет сократить объем реальных опытов. Обычно реальные опыты ставят через 3-4 «мысленных» для того, чтобы подтвердить действительное возрастание отклика. Из опытных данных находят положение локального экстремума.

7. В окрестности локального экстремума ставят новую серию опытов (ПФЭ илиДФЭ) для определения новых значений коэффициентов уравнения регрессии и нового направления градиента. В дальнейшем процедура повторяется до достижения нового локального экстремума и т.д., вплоть до определения окрестности координат максимума функции отклика, которая носит название **почти стационарной области**.

Признаком достижения этой области является статистическая незначимость коэффициентов  $b_j$ . В этой области становятся значимыми эффекты взаимодействия и квадратичные эффекты. Здесь требуется переходить отДФЭ к ПФЭ и к планам второго порядка.

Для задач, где требуется определить координаты не максимума, а минимума функции отклика, знаки  $b_j$  следует поменять на обратные. Движение будет происходить в направлении, обратном вектору градиента.

### 4.13.3. Симплекс-планирование

Позволяет без предварительного изучения влияния факторов найти область оптимума. Т.к. здесь не требуется определение градиента, то этот метод относится безградиентным метода поиска оптимума. Для этого используется специальный план эксперимента в виде **симплекса**.

**Симплекс** – простейший выпуклый многогранник, образованный  $k+1$  вершинами в  $k$ -мерном пространстве, которые соединены между собой прямыми линиями. При этом координаты вершин симплекса являются значениями факторов в отдельных опытах.



$k=2$ , симплекс-треугольник,  $k=3$  – тетраэдр и т.д.

Симплекс называется **правильным**, если все расстояния между его вершинами (ребра) равны.

Алгоритм симплекс планирования:

Строится исходный симплекс, проводятся опыты в его вершинах и анализируются результаты.

1. Выбирается вершина, в которой получено наименьшее значение функции отклика. Для движения к оптимуму ставится опыт в новой точке, являющейся зеркальным отображением точки с наихудшим (минимальным) результатом. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдена почти стационарная область.

2. Не смотря на то, что путь может быть и не прямолинеен, общее число опытов может быть не большим.

При симплекс-планировании выбор размеров симплекса и его начальное положение произволен.

Для окончания процесса используются следующие критерии:

1 – разность значений функции отклика в вершинах симплекса становится меньше ранее заданной. Это означает вход в почти стационарную область вблизи оптимума, либо достижения области оптимума в виде «плато»;

2 - отражение любой из вершин симплекса после однократного «качания» приводит к возврату в исходное положение. При этом есть основания считать, что симплекс накрыл область оптимума.

3 – циклическое движение симплекса вокруг одной из его вершин на протяжении более, чем нескольких шагов. Т.е. циркулирует вокруг области оптимума.

В случаях 2 и 3 рекомендуется уменьшать размеры симплекса, т.е. расстояние между вершинами, до уточнения координаты оптимума.

Данный метод прост, но работает не достаточно быстро. Наиболее быстрым является метод, основанный на его модификации - метод деформируемого многогранника.

Ускорение достигается за счет того, что отражение осуществляется не на постоянную величину.

На рис. 4.8 показана точка 4 очередного опыта при нормальном отражении наихудшей вершины 1, точки 5', 5'', 5''' последующих опытов для случаев, соответственно, растяжения, сжатия и отрицательного сжатия многогранника.

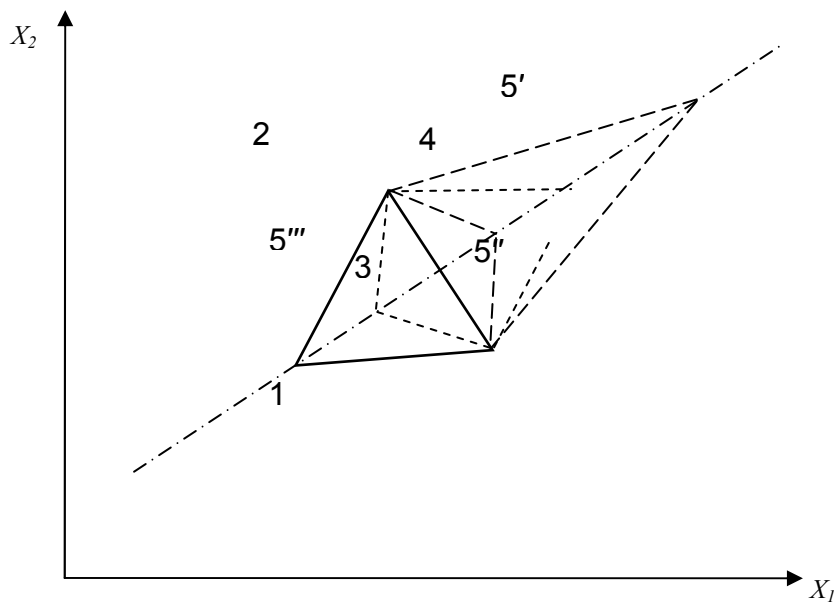


Рис. 4.8. К методу деформируемого симплекса

## 5. Статистический анализ экспериментальных данных

При выполнении измерений экспериментатор пытается определить значение той или иной величины. И как только начинаются измерения, он сталкивается с интересной ситуацией: если использовать достаточно точные приборы, то можно увидеть, что повторное измерение одной и той же величины приводит иногда к результатам, слегка отличающимся от результатов первоначального измерения. Это явление характерно как для простых, так и для сложных измерений.

Почему существует разброс, откуда берется изменение? Ответ на этот вопрос очевиден: условия проведения эксперимента все время меняются, и в условиях реального эксперимента от них избавиться невозможно. Мы «обречены» выполнять измерения величин, которые никогда не остаются постоянными. Поэтому постановка вопроса о значении некоторой величины может быть некорректной, нужна постановка такого вопроса, который отражал бы это свойство изменчивости.

Решение состоит в том, чтобы характеризовать физическую величину не одним значением, а вероятностью найти в эксперименте то или иное значение. Для этого вводится функция, называемая **распределением вероятности** обнаружения физической величины, которая показывает, какие значения чаще встречаются в эксперименте.

Далее мы увидим, что функция распределения в большинстве экспериментов является достаточно простой и имеет две характеристики. Первая – **среднее значение** физической величины, вторая – показывает область вокруг этой средней величины, в которой сосредоточено большинство результатов эксперимента. Она характеризует **ширину** этого распределения и называется **погрешностью**. Эта ширина имеет строгую интерпретацию в терминах теории вероятностей, т.е. можно указать, с какой

вероятностью мы должны обнаружить истинное значение в заданной области вокруг измеренного среднего значения. Назовем эту погрешность естественной.

Для экспериментатора построение функции распределения требует проведения многократных (бесконечного числа) измерений, что бывает дорого и никому не нужно. Поэтому приходится ограничиваться конечным числом измерений, что приносит дополнительную погрешность.

Возникает и другая проблема: в каждом эксперименте присутствует измерительный прибор, который вносит изменения в начальную функцию распределения, приводя к дополнительной (приборной) погрешности.

Разделение погрешности на естественную и приборную достаточно условное, оно позволяет лучше понять природу погрешности.

Экспериментатор должен всегда задавать себе два вопроса: как измерить физическую величину, т.е. как определить ее характеристики— среднюю и ширину, и до какой степени удастся разумно уменьшить погрешность эксперимента? Поэтому важно понимать взаимосвязь между тремя составляющими погрешности:

- естественную погрешность можно уменьшить, изменяя условия проведения эксперимента,

- погрешность, связанную с конечностью числа измерений — увеличивая их число,

- приборную — используя более точные методы и инструменты измерений.

Вместе с тем невозможно уменьшить погрешность до нуля. Для нее существует нижний предел, оценка которого — принципиальный физический вопрос. Поэтому нашей задачей является определить те экспериментальные методы, которые адекватны желаемой и

достижимой точности. В зависимости от желаемой точности могут возникнуть различные ситуации:

- если мы хотим получить порядок измеряемой величины, то и погрешность должна оцениваться грубо;

- если мы хотим получить точность порядка нескольких процентов, тогда необходимо и более аккуратно определять погрешности;

- если необходимо получить точность, сравнимую с точностью эталонных измерений, то проблема определения погрешности может стать более важной и сложной, чем проблема измерения самой величины.

Кроме указанных в эксперименте могут иметь место и другие источники ошибок, которые вызывают так называемые систематические ошибки. Выявление их и анализ намного сложнее, чем случайных. Можно указать три основных источника систематических ошибок: методика, выбранная для проведения эксперимента, плохая работа измерительных приборов, и, наконец, ошибки самого экспериментатора.

Поскольку отклик из-за влияния неконтролируемых факторов является случайной величиной, то при обработке результатов эксперимента широко используется аппарат теории вероятности и математической статистики, поэтому необходимо напомнить необходимые понятия и определения этого раздела математики.

### **5.1. Элементы теории вероятностей**

**Случайным** называется **событие**, исход которого при определенном комплексе условий невозможно предсказать заранее.

Когда речь идет об эксперименте, подразумевается, что он имеет определенные **исходы**. Список этих исходов часто бывает довольно небольшим. Например, при бросании игральной кости их шесть. При бросании монеты их всего два.

Случайная величина – величина, которая может принимать какое-либо значение из установленного множества и с которой связано вероятностное распределение.

Случайная величина может быть дискретной или непрерывной.

**Дискретная случайная величина** - может принимать значения только из конечного или счетного множества действительных чисел.

**Непрерывная случайная величина** – может принимать любые значения конечного или бесконечного интервала.

Эксперимент и его исходы часто имеют определенные числовые характеристики. Именно наличие такого рода числовых характеристик и дает основания для использования математических методов при изучении случайных событий.

Если зафиксировать уровни контролируемых факторов и провести  $n$  измерений отклика  $X$ , то в результате будет получен ряд близких, но отличных друг от друга значений  $x_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ), где  $x_i$  –  $i$ -ое измерение величины  $X$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – **реализация** случайной величины  $X$ .

Одной из важнейших числовых характеристик случайного события является его **вероятность**, которая является некоторым числом, сопоставляемым данному случайному событию. Нужно понимать, что это – фундаментальная характеристика и потому простого определения, применимого ко всем случайным событиям, просто не может быть (как нет, например, универсального определения для понятия «событие»).

В некоторых простейших случаях такое определение может быть, конечно, дано. В элементарных учебниках по теории вероятностей часто ограничиваться «классическим» определением, которое основано на хорошо известной простой схеме. В этой схеме для определения вероятности некоторого случайного события  $A$  выделяется некоторое (конечное) множество исходов, которые полагаются (или предполагаются) равновероятными. Обозначим

число этих исходов через  $n$ . Далее, устанавливается, что заданному событию  $A$  благоприятствуют определенное число, скажем  $m$ , из этих  $n$  исходов.

Тогда полагают по определению, что частотой реализации события  $A$

$$w=m/n.$$

**Вероятность  $p(A)$  случайного события  $A$**  - число от нуля до единицы, которое представляет собой **предел** частоты реализации события  $A$  при неограниченном числе повторений одного и того же комплекса условий.

Для дискретной случайной величины можно указать вероятность, с которой она принимает каждое из своих возможных значений конечного или счетного множества действительных чисел. Для непрерывной случайной величины задают вероятность ее попадания в один из заданных интервалов области ее определения, поскольку вероятность того, что она примет какое-то определенное значение, стремится к нулю.

Случайные величины можно задавать разными способами. Дискретные случайные величины обычно задаются своим **законом распределения** в табличном или графическом виде. Каждому возможному значению  $x_1, x_2, \dots$  случайной величины  $X$  сопоставляется вероятность  $p_1, p_2, \dots$  этого значения. В результате образуется таблица, состоящая из двух строк:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \dots$$

Это и есть закон распределения случайной величины, под которым понимают связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

**Непрерывные случайные** величины законом распределения в виде таблицы задать невозможно, так как по определению их

значения невозможно перенумеровать. Однако для непрерывных случайных величин есть другой способ задания (применимый, кстати, и для дискретных величин) – это **функция распределения**. Обычно используется два способа описания распределений вероятностей случайных величин: интегральный (с помощью функции распределения) и дифференциальный (задается плотностью распределения).

**Функция распределения  $F(x)$  определяет для всех действительных  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  принимает значение не больше, чем  $x$  :**

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (5.1)$$

Геометрически равенство (5.1) можно истолковать так:  $F(x)$  есть вероятность того, что случайная величина

Функция распределения  $F(x)$  имеет следующие свойства:

1.  $F(x)$  принимает значения от 0 до 1:  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
2. Ее ордината, соответствующая произвольной точке  $x_1$ , представляет собой вероятность того, что случайная величина  $X$  будет меньше, чем  $x_1$ , т.е.  $F(x_1) = P(X \leq x_1)$ .
3. Функция распределения стремится к нулю при неограниченном уменьшении  $x$  и стремится к единице при неограниченном возрастании  $x$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

4. Функция распределения представляет собой монотонно возрастающую кривую, т.е.  $F(x_1) > F(x_2)$ , если  $x_1 > x_2$ .

5. Ее приращение на произвольном интервале  $(x_1, x_2)$  равно вероятности того, что случайная величина  $X$  попадет в данный интервал:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2).$$

Часто вместо функции распределения удобно использовать другую функцию – **плотность распределения** случайной величины



$X$ . Ее еще иногда называют дифференциальной функцией распределения. Плотность распределения  $f(x)$  это первая производная (если она существует) функции распределения:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Плотность функции распределения  $f(x)$  имеет следующие свойства:

1. Плотность распределения вероятностей является неотрицательной функцией, т.е.  $f(x) \geq 0$ . Это свойство является следствием того, что функция  $F(x)$  есть неубывающая функция.

2. Функция распределения вероятностей случайной величины равна  $X$  равна определенному интегралу от плотности распределения вероятностей в пределах от  $-\infty$  до  $x$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

3. Вероятность события, состоящего в том, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(x_1, x_2)$ , равна определенному интегралу от плотности распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

4. Интеграл плотности распределения на бесконечно большом интервале  $(-\infty, +\infty)$  равен единице:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1$ , так как попадание случайной величины на интервал  $-\infty < X < +\infty$  есть достоверное событие.

В большинстве случаев при обработке экспериментальных данных, основываясь на свойствах исследуемой случайной величины, удастся записать функцию ее распределения (плотность распределения) с точностью до некоторых неизвестных параметров. Так, для случайной величины, которая удовлетворяет нормальному

закону распределения (закону Гаусса), функция распределения записывается в виде:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

В этом случае константы  $M_x$ ,  $\sigma_x^2$  являются параметрами распределения и определяют двухпараметрический закон распределения.

**Параметр распределения** – постоянная величина, от которой зависит функция распределения.

Следовательно, если установлено, что случайная величина не противоречит тому или иному закону распределения, то для того, чтобы однозначно охарактеризовать эту случайную величину, достаточно знать параметры ее распределения. Так, для нормального закона параметрами распределения являются  $M_x$  - математическое ожидание (характеризующее центр рассеивания) и  $\sigma_x^2$  - дисперсия (характеризует степень рассеивания). Более детально эти и другие числовые характеристики случайной величины будут рассмотрены ниже.

## 5.2. Числовые характеристики случайной величины

Функция распределения вероятностей полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако во многих практических задачах нет необходимости строить закон распределения, достаточно бывает указать лишь отдельные числовые характеристики, до некоторой степени характеризующие существенные черты распределения случайной величины.

Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называют **числовыми характеристиками** случайной величины.

В качестве основных числовых характеристик случайной величины выступают, так называемые, **моменты** случайной величины. Чаще всего применяются моменты двух видов:

**начальные и центральные.** Для дискретной случайной величины начальный момент  $k$  – ого порядка определяется формулой:

$$m_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i, \quad k = 1, 2, \dots,$$

для непрерывной случайной величины – формулой

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Начальный момент первого порядка ( $k=1$ ) называется **математическим ожиданием** (средним значением) случайной величины. Математическое ожидание принято обозначать различным образом:

$$M_x, M[X], m_x, m.$$

Для дискретных случайных величин

$$m_1 = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Для непрерывных

$$m_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Пользуясь знаком математического ожидания, можно объединить формулы для моментов  $k$ -ого порядка:

$$m_k = M[X^k],$$

Т.е. начальным моментом  $k$ -ого порядка случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $k$ -й степени этой случайной величины.

Перед тем, как дать определение центрального момента, введем понятие **центрированной случайной величины**.

Пусть имеется случайная величина  $X$  с математическим ожиданием  $m_x$ . **Центрированной случайной величиной**, соответствующей величине  $X$ , называется отклонение случайной величины  $X$  от ее математического ожидания:

$$\dot{X} = X - m_x$$

Нетрудно убедиться, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Центрирование случайной величины равносильно переносу начала координат в среднюю точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию.

Моменты центрированной случайной величины называются **центральными**. Центральный момент  $k$ -ого порядка для дискретной случайной величины определяется формулой

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i$$

для непрерывной случайной величины

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx.$$

Таким образом, **центральным моментом порядка  $k$**  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $k$ -ой степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\mu_k = M[\dot{X}^k] = M[(X - m_x)^k]$$

Первый центральный момент всегда равен нулю. Вторым центральным моментом называется дисперсией. **Дисперсией случайной** величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2],$$

Для дискретной случайной величины

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i$$

для непрерывной

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Другие обозначения для дисперсии:  $D_x, \sigma_x^2, \sigma^2$ . Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины; для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Поэтому часто используется

**среднее квадратическое отклонение (СКО или стандарт)**, равное квадратному корню из дисперсии и обозначаемое  $\sigma_x, \sigma$ .

Математическое ожидание и дисперсия наиболее часто используемые числовые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его положение и степень разбросанности. Для более подробного описания распределения используются моменты высших порядков.

**Третий центральный момент** служит для характеристики **асимметрии** (скошенности) распределения. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все моменты нечетного порядка (если они существуют), равны нулю. Поэтому наиболее логично принять 3-й центральный момент, а чтобы получить безразмерную характеристику, его делят на куб среднего квадратического отклонения. Полученная величина называется коэффициентом асимметрии:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

**Четвертый центральный момент** служит для характеристики «крутости», т.е. островершинности или плосковершинности распределений. Эти свойства распределения описываются с помощью **эксцесса**. Эксцессом случайной величины называют отношение

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Число 3 вычитается из отношения потому, что для нормального распределения отношение  $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$  равно 3. Таким образом, для нормального распределения эксцесс равен нулю.

### **5.3. Числовые характеристики положения (мода, медиана, квантили)**

Из характеристик положения важнейшую роль играет **математическое ожидание**, которое называют просто средним значением случайной величины. Известно, что при большом числе опытов среднее арифметическое значений случайной величины приближается к ее математическому ожиданию. Свойство устойчивости при большом числе опытов легко проверить

экспериментально: в результате взвешивания какого-либо образца на точных весах несколько раз получается новое значение, усредняя эти значения, получаем среднее арифметическое. При дальнейшем увеличении числа опытов (взвешиваний) среднее арифметическое реагирует на увеличение числа опытов все меньше и меньше.

На практике иногда применяют и другие характеристики положения- моду и медиану.

**Модой** случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывных величин – то значение случайной величины, при котором значение плотности вероятности максимально.

Часто применяется характеристика положения – **медиана**. Используется обычно для непрерывных случайных величин, хотя формально может быть использована и для дискретных.

Медианой случайной величины  $X$  называется такое ее значение  $Me$ , для которого

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

Т.е. одинаково верно, окажется ли случайная величина меньше или больше  $Me$ . Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

**В случае симметричного распределения медиана совпадает с модой и математическим ожиданием.**

**Квантиль** (термин был впервые использован Кендаллом в 1940 г.) выборки представляет собой число  $x_p$ , ниже которого находится  $p$ -я часть (доли) выборки.

Например, квантиль 0,25 для некоторой переменной - это такое значение ( $x_p$ ), ниже которого находится 25% значений переменной.

Аналогично квантиль 0,75 - это такое значение, ниже которого попадают 75% значений выборки.

**Квартили.** Нижняя и верхняя квартили, от слова кварта — четверть (термин впервые использовал Гальтон в 1882) равны соответственно 25-й и 75-й процентилем распределения.

25-я процентиль переменной - это значение, ниже которого располагаются 25% значений переменной.

Аналогично, 75-я перцентиль равна значению, ниже которого расположено 75% значений переменной.

Итак, 3 точки - нижняя квартиль, медиана и верхняя квартиль - делят выборку на 4 равные части.

$1/4$  наблюдений лежит между минимальным значением и нижней квартилью,  $1/4$  - между нижней квартилью и медианой,  $1/4$  - между медианой и верхней квартилью,  $1/4$  - между верхней квартилью и максимальным значением выборки.

## 5.4. Типовые законы распределения

Для изучения основных законов распределения вероятностей введем понятие **индикатора случайного события**  $A$  – это дискретная случайная величина  $X$ , которая равна 1 при осуществлении события  $A$  и 0 при осуществлении  $\bar{A}$ :

$$X = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \bar{A} \end{cases}.$$

Ряд распределения вероятностей индикатора случайного события:

$x_i$	$0$	$1$
$p_i$	$q$	$p$

где  $p$  – вероятность осуществления  $A$ ;

$q = 1 - p$  – вероятность осуществления  $\bar{A}$ .

Числовые характеристики индикатора случайного события:

$$m_x = p, D_x = qp.$$

### 5.4.1. Геометрическое распределение

имеет дискретная случайная величина  $X$ , если она принимает значения  $0, 1, \dots, \infty$  с вероятностями:

$$p(X = i) = p_i = q p^i,$$

где  $p$  – параметр распределения ( $0 \leq p \leq 1$ ),  $q = 1 - p$ .

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$m_x = q/p; D_x = q/p^2.$$

**Условия возникновения.** Проводится ряд одинаковых независимых опытов до первого появления некоторого события  $A$ . Случайная величина  $X$  – число проведенных безуспешных опытов до первого появления события  $A$ .

### 5.4.2. Биномиальное распределение

имеет дискретная случайная величина  $X$ , если она принимает значения  $0, 1, \dots, n$  со следующими вероятностями

$$p(X = i) = p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i},$$

где  $n, p$  – параметры распределения ( $0 \leq p \leq 1$ ),  $q = 1 - p$ .

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_x = np; D_x = npq.$$



**Условия возникновения.** Проводится  $n$  одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых событие  $A$  появляется с вероятностью  $p$ . Случайная величина  $X$  – число опытов, в которых произошло событие  $A$ .

### 5.4.3. Распределение Пуассона

имеет дискретная случайная величина  $X$ , если она принимает значения  $0, 1, \dots, \infty$  со следующими вероятностями:

$$p(X = i) = p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a},$$

где  $a$  – параметр распределения ( $a > 0$ ).

Числовые характеристики пуассоновской случайной величины:

$$m_x = a, D_x = a.$$

**Условия возникновения:**

1. Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального, когда число опытов  $n$  неограниченно увеличивается, а вероятность  $p$  события  $A$  в одном опыте стремится к 0, так что существует предел  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} np = a$ .

2. Случайная величина  $X$  – число событий пуассоновского потока, поступивших в течение интервала  $\tau$ , причем параметр  $a = \tau\lambda$ , где  $\lambda$  – интенсивность потока.

Рассмотрим временную ось, на которой будем отмечать моменты возникновения случайных событий (например, отказы компонентов в сложном техническом устройстве, заявки на обслуживание и т.п.). Последовательность таких моментов называется **поток случайных событий**.

Поток случайных событий называется **стационарным**, если число событий, приходящихся на интервал  $\tau$ , в общем случае не зависит от расположения этого участка на временной оси и определяется только его длительностью, т.е. среднее число событий в единице времени  $\lambda$  (**интенсивность потока**) постоянно.

Поток случайных событий называется **ординарным**, если вероятность попадания в некоторый участок  $\Delta t$  двух и более случайных событий значительно меньше, чем вероятность попадания 1-го события. В потоке **отсутствует последствие**, если

вероятность попадания событий на участок  $\tau$  не зависит от того, сколько событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным.

Поток случайных событий называется **пуассоновским** или простейшим, если он является стационарным, ординарным и без последствия.

#### 5.4.4. Равномерное распределение

имеет непрерывная случайная величина  $X$ , если ее плотность вероятности в некотором интервале  $[a; b]$  постоянна, т.е. если все значения  $X$  в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Ниже приведен график плотности равномерного распределения.

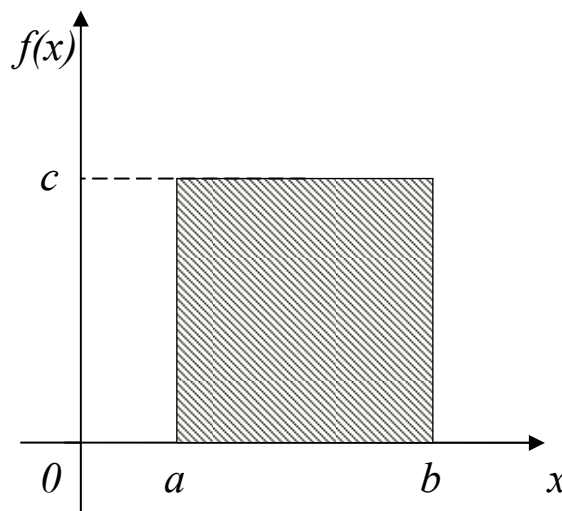


Рис.5.1. График плотности вероятности равномерного распределения

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины:

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

При необходимости определения параметров  $a$  и  $b$  по известным  $m_x, D_x$  используют следующие формулы:

$$a = m_x + \sigma_x \sqrt{3},$$

$$b = m_x - \sigma_x \sqrt{3}.$$

**Условия возникновения:**

1. Случайная величина  $X$  – ошибки округления при ограниченной разрядной сетке:

– округление до меньшего целого,  $X \in [-1; 0]$ ,  $m_x = -0,5$ ;

– округление до большего целого,  $X \in [-0; 1]$ ,  $m_x = 0,5$ ;

– округление до ближайшего целого,  $X \in [-0,5; 0,5]$ ,  $m_x = 0$ , где 1 – вес младшего разряда.

2. Случайная величина  $X$  – погрешность считывания значений с аналоговой шкалы измерительного прибора,  $X \in [-0,5; 0,5]$ ,  $m_x = 0$ , где 1 – цена деления шкалы.

3. Генераторы псевдослучайных величин, например *RANDOM*, встроенные в языки программирования высокого уровня.

### 5.4.5. Экспоненциальное распределение

или **показательное распределение** имеет непрерывная случайная величина  $T$ , принимающая только положительные значения, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

где  $\lambda$  – параметр распределения ( $\lambda > 0$ ).

Ниже приведены графики плотности и функции экспоненциального распределения.

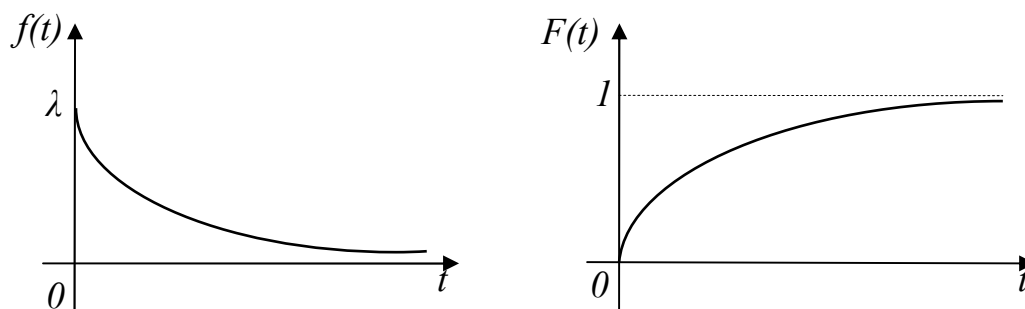


Рис.5.2. Плотность вероятности и функция экспоненциального распределения

Числовые характеристики экспоненциальной случайной величины:

$$m_T = 1/\lambda ; D_T = 1/\lambda^2$$

**Условия возникновения.** Случайная величина  $T$  – интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем или пуассоновском потоке случайных событий, причем параметр распределения  $\lambda$  – интенсивность потока.

#### 5.4.6. Нормальный закон распределения

Из всех изученных к настоящему времени случайных величин, наиболее часто при обработке экспериментальных данных исследователи используют нормальное (Гауссово) распределение. Отметим, что согласно центральной предельной теореме, которая гласит, что при определенных условиях распределение нормированной суммы  $n$  независимых случайных величин, распределенных по произвольному закону, стремится к нормальному при  $n$  стремящемся к бесконечности. Условия, при которых теорема оказывается справедливой, состоят в том, что различные случайные величины должны иметь конечные дисперсии и дисперсия любой случайной величины не должна быть слишком большой по сравнению с дисперсиями других.

При обработке экспериментальных данных эта теорема имеет очень большое значение, поскольку отклик является случайной величиной в результате влияния неконтролируемых факторов, число которых, в общем случае, стремится к бесконечности.

Следовательно, если при планировании эксперимента учтены все наиболее существенные факторы и затем, при проведении опытов, они контролируются, то при обработке экспериментальных данных можно предполагать, что отклик не должен противоречить нормальному закону распределения.

Большинство других распределений (Стьюдента, Фишера, Кохрена, Пирсона и др.), которые используются в математической статистике, получены на основе нормального распределения.

Но с другой стороны, нельзя абсолютизировать значение нормального закона. Не все случайные величины распределены по нормальному закону. Но если явление подвержено многим

случайным факторам, то их суммарное воздействие можно описать с помощью нормального закона.

Как отмечалось ранее, для случайной величины, не противоречащей нормальному закону, функция распределения задается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx,$$

а соответствующая ей плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

и определяется двумя параметрами  $M_x$  - математическим ожиданием и  $\sigma_x^2$  - дисперсией. На рис.5.4. показан график плотности распределения вероятности нормального закона – кривая распределения, которая называется нормальной кривой или кривая Гаусса.

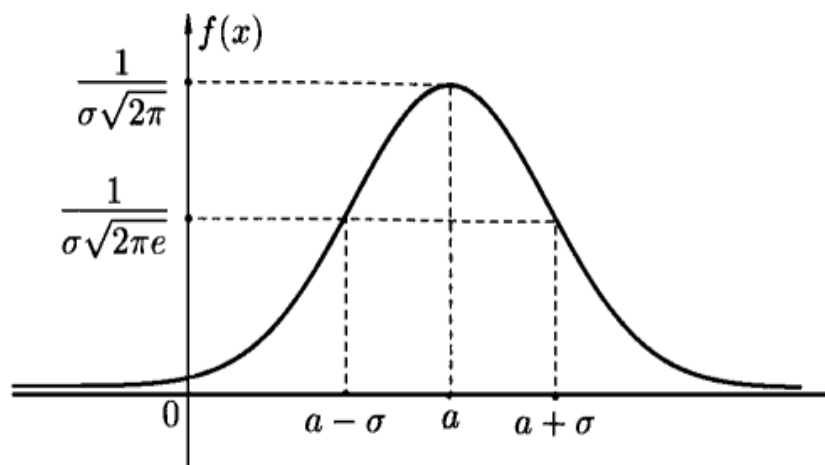


Рис.5.4. Кривая Гаусса

Основные свойства нормального закона распределения:

1. Кривая плотности распределения симметрична относительно значения  $M_x = a$ , называемого центром распределения.

2. При больших значениях  $\sigma_x^2$  кривая  $f(x)$  более пологая, т.е.  $\sigma_x^2$  является мерой величины рассеивания значения случайной величины около значения  $M_x$ .

3. Максимум ординаты кривой плотности распределения определяется выражением  $f_{max}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}$ .

4. Можно убедиться, что точки  $(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$  и  $(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$  являются точками перегиба графика функции  $f(x)$ .

5. Для нормального распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

В ряде случаев удобно рассматривать не саму случайную величину, а ее отклонение от математического ожидания:

$$\dot{X} = X - M_x.$$

Такая случайная величина называется **центрированной**. Отношение случайной величины к ее среднему квадратическому отклонению  $\frac{X}{\sigma_x}$  называется **нормированной** случайной величиной.

Очевидно, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, а дисперсия нормированной случайной величины – единице.

Приведенная (стандартная) случайная величина – это центрированная и нормированная случайная величина

$$Z = \frac{X - M_x}{\sigma_x}.$$

Математическое ожидание и дисперсия приведенной случайной величины равны соответственно, нулю и единице. Нормальное распределение с  $M_x = 0$  и  $\sigma_x^2 = 1$  называется стандартным и обозначается  $N(0,1)$ .

Для приведенной случайной величины нормальное стандартное распределение принимает вид

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

На рис. 5.5 показаны функция распределения и плотности нормального закона распределения вероятности.

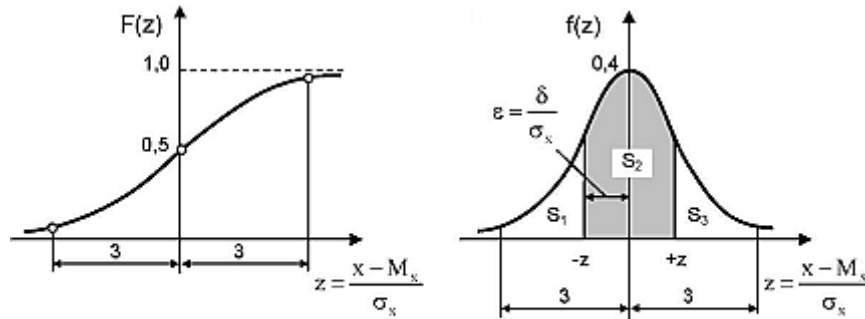


Рис.5.5.Основные свойства нормального распределения

Значения нормированной функции нормального распределения табулированы и приведены в различных учебниках и справочниках. Отметим, что иногда вместо функции  $F(z)$  табулируется функция  $\Phi(z)$ :

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Т.к.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2}$  (известный в математике интеграл Пуассона), то  $F(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z)$ .

Функция  $\Phi(z)$  нечетная, т.е.  $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ . В ряде случаев важно знать, что случайная нормально распределенная величина  $X$  не будет отличаться от своего математического ожидания  $M_x$  не больше, чем на величину  $\varepsilon$ :

$$P(|X - M_x| < \varepsilon) = P(M_x - \varepsilon < X < M_x + \varepsilon).$$

Выразив вероятность через плотность вероятности, получим

$$P(|X - M_x| < \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx.$$

Для приведенной случайной величины

$$P(|z| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon).$$

$$\text{Т.к. } z = \frac{X - M_x}{\sigma_x},$$

$$P(|X - M_x| < \varepsilon) = P\left(|z| < \frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right).$$

Обозначив  $\varepsilon = k\sigma_x$ , получим  $P(|X - M_x| < k\sigma_x) = 2\Phi(k)$ .

Поскольку  $\Phi(k)$  табулированная функция, то ее значения можно определить для  $k = 1, 2, 3$ :

$$P(|X - M_x| < \sigma_x) = 2\Phi(1) = 0,6826;$$

$$P(|X - M_x| < 2\sigma_x) = 2\Phi(2) = 0,9544;$$

$$P(|X - M_x| < 3\sigma_x) = 2\Phi(3) = 0,997$$

Таким образом, для нормально распределенной случайной величины вероятность того, что она примет такое значение, которое не будет отличаться от ее математического ожидания более чем на одно СКО, равна 0,68. Т.е. при нормальном распределении примерно 2/3 всех значений случайной величины лежит в интервале  $M_x \pm \sigma_x$ , а 95% значений случайной величины лежат в диапазоне  $M_x \pm 2\sigma_x$ . Интервалу  $M_x \pm 2\sigma_x$  соответствует вероятность 0,95, а интервалу  $M_x \pm 3\sigma_x$  - вероятность 0,997.

Следовательно, *отличие какого-либо из значений нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0.99. Это свойство нормально распределенной случайной величины носит название «правило трех сигм».*

#### 5.4.7. Распределение $\chi^2$ (хи – квадрат)

Рассмотрим распределение некоторых случайных величин, представляющих функции нормальных величин, используемых в математической статистике.

Пусть случайная величина  $Y$ , распределена по нормальному закону  $Y \in N(a, \sigma^2)$ . Тогда случайная величина  $U = \frac{Y-a}{\sigma} = \chi$  распределена по нормальному закону с параметрами  $M(U)=0$  и  $\sigma(U)=1$ , т.е.  $U \in N(0,1)$ . Квадрат такой стандартизованной случайной величины

$$U^2 = \left(\frac{Y-a}{\sigma}\right)^2 = \chi^2$$

называется **случайной величиной  $\chi^2$**  (хи – квадрат) с одной степенью свободы.



Рассмотрим  $n$  независимых случайных величин  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , распределенных по нормальному закону с  $M(Y_i) = a_i$  и средними квадратическими отклонениями  $\sigma_i, i=1 \dots n$ .

Образуем для каждой из этих случайных величин стандартизованную случайную величину

$$U_i = \frac{Y_i - a_i}{\sigma_i}, i = \overline{1, n}.$$

Сумма квадратов стандартизованных переменных  $\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 = \left(\frac{Y_1 - a_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{Y_2 - a_2}{\sigma_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{Y_n - a_n}{\sigma_n}\right)^2$

называется случайной величиной  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы. Плотность распределения случайной величины  $\chi^2$  имеет вид:

$$f(\chi^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \text{если } \chi^2 > 0, \\ 0, & \chi^2 \leq 0 \end{cases}$$

где  $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$  - гамма-функция Эйлера и является обобщением понятия факториала:  $\Gamma(p) = (p-1)!$  для целых положительных  $p$ .

Итак, распределение  $\chi^2$  зависит от одного параметра  $n$  - числа степеней свободы. С возрастанием  $n$  распределение  $\chi^2$  приближается к нормальному закону распределения (при  $n \geq 30$  распределение  $\chi^2$  практически не отличается от нормального)

На практике, как правило, используются не  $f(\chi^2)$  и  $F(\chi^2)$ , а квантили  $\chi^2$ - распределения  $\chi_{\alpha, n}^2$ . Квантилем  $\chi_{\alpha, n}^2$ , отвечающим заданному уровню вероятности  $\alpha$ , называется такое значение  $\chi^2 = \chi_{\alpha, n}^2$ , при котором

$$P(\chi^2 > \chi_{\alpha, n}^2) = \int_{\chi_{\alpha, n}^2}^\infty f(\chi^2) d(\chi^2) = \alpha.$$

Нахождение квантиля, с геометрической точки зрения, заключается в том, чтобы выбрать такое значение  $\chi^2 = \chi_{\alpha, n}^2$ , при котором площадь заштрихованной криволинейной трапеции (см. рис.5.6.) была бы равна  $\alpha$ .

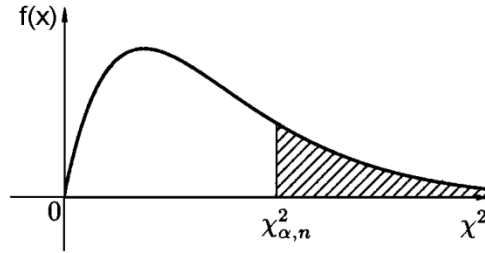


Рис.5.6. Нахождение квантиля распределения Пирсона

### 5.4.8. Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента ( $t$ -распределение) имеет важное значение при статистических вычислениях, связанных с нормальным законом, а именно тогда, когда среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  неизвестно и подлежит определению по опытными данным.

Пусть  $Y: Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами  $M(Y) = M(Y_i) = 0$  и  $\sigma_Y = \sigma_{Y_i} = 1, i = \overline{1, n}$ .

Случайная величина

$$t = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n \sum_{i=1}^n Y_i^2}}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} \chi_n^2}}$$

является функцией нормально распределенных случайных величин и называется безразмерной дробью Стьюдента.

Плотность распределения случайной величины  $t$  имеет вид:

$$f(t) = S(t, n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где  $n$  - число слагаемых в подкоренном выражении дроби Стьюдента.

Из формулы видно, что распределение случайной величины  $t$  зависит только от одного параметра – числа степеней свободы  $n$ , равного числу слагаемых в подкоренном выражении дроби Стьюдента ( $\cdot$ ).

Известно, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $t$  соответственно равны

$$M(t) = 0; D(t) = \frac{n}{n-2}; (n > 2).$$

На рис.5.7. изображен график плотности распределения Стьюдента при различных степенях свободы. Замечаем, что при увеличении числа степеней свободы  $n$  он приближается к кривой Гаусса.

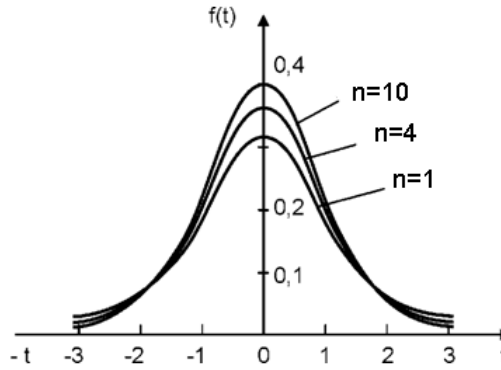


Рис.5.7. Распределение Стьюдента

В статистических расчетах используются квантили  $t$ -распределения  $t_{\frac{\alpha}{2};n}$ . Значения квантилей находятся из решения уравнения:  $P(|t| > t_{\frac{\alpha}{2};n}) = 2 \int_{t_{\frac{\alpha}{2};n}^{\infty} f(t) dt = \alpha$ .

С геометрической точки зрения, нахождение квантилей  $t_{\frac{\alpha}{2};n}$  заключается в том выборе значения  $t = t_{\frac{\alpha}{2};n}$ , при котором суммарная площадь заштрихованных на рис.5.8 криволинейных трапеций была бы равна  $\alpha$ .

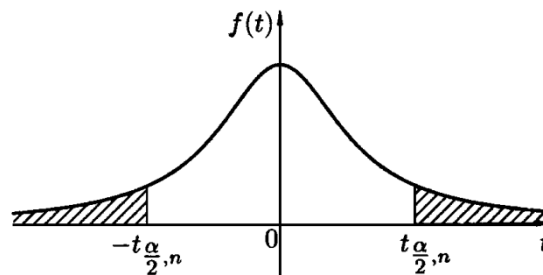


Рис.5.8. Квантили распределения Стьюдента

На рис.5.9 графически представлено соотношение между основными законами распределения вероятностей.

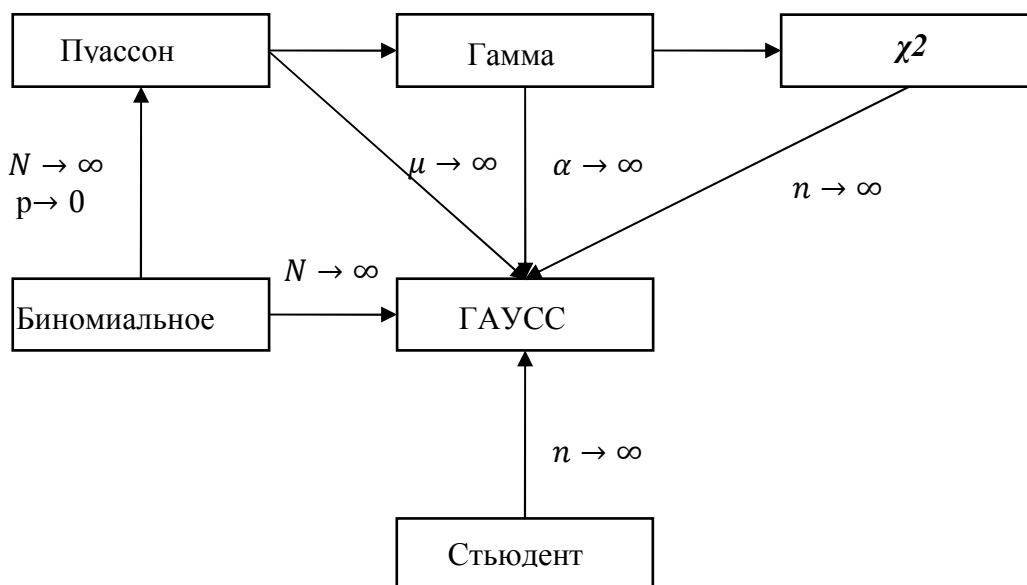


Рис.5.9. Соотношения между различными законами распределения

### 5.5. Числовые характеристики системы случайных величин (ковариация и корреляция)

Особую роль при исследовании системы случайных величин играет второй смешанный центральный момент, который называется **корреляционным моментом (ковариацией)**. Он обычно обозначается:

$$k_{x,y} = \mu_{1,1} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dx$$

Этот момент, определяемый как математическое ожидание произведения отклонений двух случайных величин от их математических ожиданий, характеризует взаимное влияние этих случайных величин. Для оценки степени этого влияния используют **коэффициент корреляции** случайных величин  $Y$  и  $X$ :

$$r_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Если случайные величины  $Y$  и  $X$  независимы, корреляционный момент и коэффициент корреляции равны нулю. В общем случае равенство нулю коэффициента корреляции является необходимым, но не достаточным условием независимости случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Если имеется система, состоящая из  $l$  случайных величин, можно ввести матрицу корреляционных моментов (ковариационную матрицу):

$$\begin{matrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,l} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,l} \\ k_{l,1} & k_{l,2} & \dots & k_{l,l} \end{matrix}$$

Поскольку  $k_{1,1} = \sigma_1^2$ , а из определения центрального момента следует, что  $k_{i,j} = k_{j,i}$ , поэтому имеет место треугольная матрица

$$\begin{matrix} \sigma_1^2 & k_{1,2} & \dots & k_{1,l} \\ & \sigma_2^2 & \dots & k_{2,l} \\ & & \dots & \sigma_l^2 \end{matrix}$$

Если случайные величины некоррелированы, то имеет место диагональная матрица, элементами которой являются соответствующие дисперсии случайных величин.

Если перейти от корреляционных моментов к коэффициентам корреляции, то получается корреляционная матрица:

$$\begin{matrix} 1 & r_{1,2} & \dots & r_{1,l} \\ & 1 & \dots & r_{2,l} \\ & & \dots & 1 \end{matrix}$$

**Корреляционная матрица одна из важнейших характеристик, описывающих систему случайных величин. На основе корреляционной матрицы можно получить значение множественного коэффициента корреляции  $R$ , характеризующего статистическую зависимость некоторой переменной от остальных переменных.**

## **5.6. Нормальное распределение системы случайных величин**

Так же как и в одномерном случае важнейшим законом распределения является нормальный многомерный закон распределения, для которого справедливо следующее положение: если нормально распределенные случайные величины некоррелированы, то они независимы. Кроме того, показано, что для

нормально распределенных случайных величин уравнения регрессии имеют вид:

$$y = m_y - r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x),$$
$$x = m_x - r_{x,y} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y).$$

Приведенные выше теоретические положения определяют условия применимости коэффициента корреляции как показателя, позволяющего оценивать тесноту связи исследуемых переменных.

Для корректного использования данного показателя необходимо, чтобы рассматриваемые переменные представляли собой систему случайных величин, имеющих нормальный совместный закон распределения. Тогда величина парного и множественного коэффициента корреляции может трактоваться как показатель, характеризующий уровень статистической линейной зависимости случайных величин. Для парного коэффициента корреляции имеем:

$$-1 \leq r_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \leq +1$$

При  $r_{x,y} = 1$  переменные связаны прямой линейной зависимостью – при  $r_{x,y} = -1$  обратной линейной зависимостью. Множественный коэффициент корреляции  $0 \leq R \leq 1$  (0 - линейная зависимость отсутствует; 1- имеет место функциональная линейная зависимость).

### 5.7. Элементы математической статистики

**Математическая статистика** – раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений.

Математическая статистика решает следующие задачи:

1. упорядочение данных, представление их в удобном для анализа виде;
2. оценка интересующих нас характеристик наблюдаемой случайной величины;
3. проверка статистических гипотез, т.е. решение вопроса согласования оценивания с опытными данными (например, проверка гипотезы о том, что наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону).

Важнейшей задачей статистики является разработка методов, позволяющих по результатам исследования выборки сделать выводы о параметрах распределения всей совокупности.

### 5.7.1. Генеральная совокупность и случайная выборка

На практике исследователь обладает лишь ограниченным объемом значений случайной величины, представляющим собой некоторую **выборку** из **генеральной совокупности**. Под генеральной совокупностью понимаем все допустимые значения случайной величины. При анализе непрерывной случайной величины (например, температура, давление) под наблюдаемыми значениями случайной величины понимают такие дискретные значения, разделенные определенным интервалом времени, при котором произведенные замеры можно считать независимыми.

Выборка называется **репрезентативной**, если она дает достаточно полное представление о генеральной совокупности.

В математической статистике доказано (теорема Гливенко), что при достаточно большой выборке функцию распределения вероятностей генеральной совокупности можно заменять функцией распределения выборки.

Числовые характеристики, определенные при ограниченном объеме информации, называются **оценками**.

Другими словами, на практике мы всегда имеем дело с **оценками** числовых характеристик случайных величин. Пусть  $\tilde{a}$  является оценкой параметра  $a$ .

К оценкам числовых характеристик предъявляются следующие требования:

**1. Состоятельность** – при увеличении числа опытов оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е. выполняется условие

$$P(|\tilde{a}_n - a| < \varepsilon) = 1 \text{ при увеличении объема выборки } n.$$

**2. Несмещенность** – математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру, т.е. при увеличении объема выборки ее математическое ожидание стремится к оцениваемому параметру:  $M(\tilde{a}_n) = a$  при увеличении  $n$ .

**3. Эффективность** – несмещенная оценка должна обладать минимальной дисперсией по сравнению с другими оценками, т.е.

$$D(\tilde{a}_n) = D_{min}.$$

### 5.7.2. Точечные оценки параметров нормального распределения

Как известно, параметрами нормального распределения являются математическое ожидание и дисперсия. В качестве оценки для **математического ожидания** естественно предположить среднее арифметическое наблюдаемых значений (**выборочное среднее**), т.е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

которое получается из ранее приведенной зависимости для математического ожидания, если положить

$$p_i = p = 1/n.$$

В математической статистике доказано, что выборочное среднее является наилучшей (состоятельной, несмещенной и эффективной) оценкой математического ожидания случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения.

На первый взгляд естественной оценкой для дисперсии  $D[X]$  будет

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})/n,$$

Но эта оценка получается несколько смещенной:

$$M[s_1^2] = \frac{n-1}{n} D[X].$$

Поэтому для оценки дисперсии используется несмещенная оценка:

$$s^2 = s_1^2 \frac{n}{n-1} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1).$$

Уменьшение знаменателя на единицу непосредственно связано с тем, что величина  $\bar{x}$ , относительно которой берутся отклонения, сама зависит от объема выборки. Каждая величина, зависящая от элементов выборки и входящая в формулу, называется **связью**. В статистике доказывается, что знаменатель выборочной дисперсии всегда равен разности между объемом выборки  $n$  и числом связей  $l$ , наложенных на эту выборку. Эта разность



$$f = n - l$$

называется **числом степеней свободы** выборки. В практических вычислениях для оценки дисперсии часто используется более удобная формула:

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right).$$

Преимущество этой формулы в том, что в ней нет операций вычитания близких чисел, приводящих к потере точности.

### 5.7.3. Классификация ошибок измерения

Каждый результат измерения – случайная величина. Отклонение реального результата от истинного называется **ошибкой наблюдения**. Ошибка наблюдения также является случайной величиной. Она является результатом воздействия неучтенных факторов. Если обозначить истинный результат через  $a$ , ошибку – через  $\Delta X$ , результат измерения  $X$ , то

$$X - a = \Delta X.$$

Различают ошибки трех видов:

1. Грубые ошибки, которые возникают вследствие нарушения основных условий измерения. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений. На этом основаны некоторые критерии по исключению грубых ошибок.

2. Систематические ошибки постоянны во всей серии измерений или изменяются по определенному закону. Выявление их требует специальных исследований, но как только систематические ошибки обнаружены, они могут быть устранены путем введения соответствующих поправок в результаты измерения.

3. Случайные ошибки – это те ошибки измерения, которые остаются после устранения всех выявленных грубых и систематических ошибок. Они вызываются большим количеством факторов, эффекты воздействия которых столь незначительны, что их нельзя выделить в отдельности ( на данном уровне используемой техники измерения). При этом распределение случайных ошибок симметрично относительно нуля: ошибки, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине, встречаются одинаково часто. Из симметрии распределения ошибок следует, что истинный результат наблюдения есть математическое ожидание

соответствующей случайной величины. Т.к.  $X = a + \Delta X$ , и при отсутствии грубых и систематических ошибок  $M[\Delta X] = 0$ , то  $M[X] = a$ .

В дальнейшем будем рассматривать только случайные ошибки измерений.

#### 5.7.4. Закон сложения ошибок

Для независимых случайных величин свойством аддитивности обладают дисперсии, а не среднеквадратические ошибки. Если  $X_1, X_2 \dots X_n$  - независимые случайные величины;  $a_1, a_2 \dots a_n$  - неслучайные величины и

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n,$$

то выборочная дисперсия величины  $Z$  определяется следующим образом:

$$S_Z^2 = a_1^2 S_{X_1}^2 + a_2^2 S_{X_2}^2 + \dots + a_n^2 S_{X_n}^2.$$

Если положить  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , то

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}.$$

В этом случае

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_{X_1}^2 + S_{X_2}^2 + \dots + S_{X_n}^2}{n^2} = \frac{\bar{S}_X^2}{n},$$

где  $\bar{S}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_{X_i}^2}{n}$ .

Если  $X_1, X_2 \dots X_n$  интерпретировать как  $n$  независимых наблюдений одной и той же случайной величины  $X$ , то  $S_{X_1}^2 = S_{X_2}^2 = \dots = S_{X_n}^2 = S_X^2$ , тогда получим

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{n}.$$

Из полученного выражения следует один очень важный практический вывод: при оценке точности двух методов измерений следует учитывать длительность анализа. Применяя менее точные методы можно сделать большее число опытов и получить более точные результаты, чем при использовании трудоемкого точного метода. Можно сделать вывод о возможности уменьшить погрешность окончательного результата при увеличении количества  $n$  отдельных измерений. Однако также следует помнить, что повышение точности никогда не дается бесплатно. Так, чтобы узнать

дополнительную цифру в  $\bar{X}$ , т.е. повысить точность в 10 раз, количество измерений необходимо увеличить в 100 раз!

### 5.7.5. Ошибки косвенных измерений

Измерения делятся на **прямые** и **косвенные**. В первом случае непосредственно измеряется определяемая величина, при косвенных измерениях она определяется как функция от непосредственно измеряемых величин. Пусть между случайными величинами  $z$  и  $x_1, x_2 \dots x_n$  существует известная функциональная зависимость:

$$z = f(x_1, x_2 \dots x_n).$$

Истинное значение величины  $z$  может не совпадать с математическим ожиданием  $M_z$ , а определяется тем же законом:

$$a_z = f(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots m_{x_n}).$$

Величина  $a_z$  называется средним косвенного измерения.

Дисперсия косвенного измерения  $\sigma_z^2$  определяется так же, как обычная дисперсия, только отклонения берутся от среднего косвенного измерения  $a_z$ . Ее можно найти, зная дисперсии отдельных наблюдений и вид функции  $f$ . На практике определяют выборочные дисперсии  $s_{x_i}^2$  и по ним выборочную дисперсию косвенного измерения  $s_z^2$ , которая служит оценкой генеральной дисперсии  $\sigma_z^2$ . Чтобы найти  $s_z^2$ , разложим функцию  $z = f(x_1, x_2 \dots x_n)$  в ряд Тейлора в точке  $(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})$ , ограничившись членами первого порядка:

$$z \approx f(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots m_{x_n}) + \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - m_{x_1}) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - m_{x_2}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_n - m_{x_n}),$$

И определим  $s_z^2$  по закону сложения дисперсий:

$$s_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2.$$

Полученное выражение называют **законом накопления ошибок**.

## 5.8. Доверительные интервалы и доверительная вероятность

Точечные оценки имеют тот недостаток, что по ним нельзя судить о точности полученных оценок. Поэтому возникает задача определения на основании выборочных значений такого интервала,

который покрывал бы неизвестной значение параметра с заданной вероятностью.

В отличие от точечной оценки, интервальная оценка позволяет получить вероятностную характеристику точности оцениваемого параметра.

Выборочные параметры являются случайными величинами, их отклонения от генеральных (т.е. погрешности их определения) также будут случайными. Оценка этих отклонений носит вероятностный характер – можно лишь указать вероятность той или иной погрешности. Для этого в математической статистике пользуются **доверительными интервалами** и **доверительными вероятностями**.

**Доверительный интервал** – интервал, который с заданной вероятностью накроет неизвестное значение оцениваемого параметра распределения.

**Доверительная вероятность** – вероятность того, что доверительный интервал накроет действительное значение параметра, оцениваемого по выборочным данным.

**Оценивание с помощью доверительного интервала** – способ оценки, при котором с заданной доверительной вероятностью устанавливают границы доверительного интервала.

Пусть для генерального параметра  $a$  получена из опыта несмещенная оценка  $a^*$ . Нужно оценить возможную при этом ошибку. Назначим достаточно большую вероятность  $\beta$  – такую, что событие с этой вероятностью можно считать практически достоверным, и найдем такое значение  $\varepsilon$  для которого

$$P(|a^* - a| \leq \varepsilon) = \beta \quad (5.8.1)$$

При этом диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене  $a$  на  $a^*$ , будет  $\pm \varepsilon$ , большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью

$$\alpha = 1 - \beta$$

**называемой уровнем значимости** или **риском**. Уровень значимости часто выражают в процентах. Иначе формулу (5.8.1) можно интерпретировать как вероятность того, что истинное значение параметра  $a$  лежит в пределах

$$a^* - \varepsilon \leq a \leq a^* + \varepsilon$$

Вероятность  $\beta$  называется **доверительной вероятностью**, **доверительным уровнем** или **надежностью**, т.к. она характеризует надежность полученной оценки.

Интервал  $I_\beta = a^* \pm \varepsilon$  называется **доверительным интервалом**.

Границы интервала  $a' = a^* - \varepsilon$  и  $a'' = a^* + \varepsilon$  доверительными границами. **Доверительный интервал при данной доверительной вероятности определяет точность оценки параметра.**

При этом отметим следующее. Ранее мы рассматривали вероятность попадания случайной величины на заданный (неслучайный) интервал. В данном случае дело обстоит иначе: величина  $a$  не случайна, зато случаен интервал  $I_\beta$ . Случайно его положение на числовой прямой, определяемое его центром  $a^*$ , случайна и длина интервала  $2\varepsilon$ , так как величина  $\varepsilon$  вычисляется, как правило, по опытным данным, т.е. по результатам эксперимента. Поэтому в рассматриваемом случае удобно толковать интервал  $I$  как вероятность того, что случайный интервал  $I_\beta$  накроет величину  $a$ .

Величина доверительного интервала зависит от доверительной вероятности, с которой гарантируется нахождение параметра внутри доверительного интервала: чем больше величина  $\beta$ , тем больше и  $\varepsilon$  (т.е. с чем большей вероятностью мы хотим гарантировать полученный результат, тем в большем интервале он должен находиться).

Увеличение числа опытов проявляется в сокращении доверительного интервала при постоянной доверительной вероятности или в повышении доверительной вероятности при сохранении доверительного интервала.

Обычно на практике фиксируется на определенном уровне значение доверительной вероятности (0.9, 0.95, 0.99, 0.999). Исходя из этого значения, определяют доверительный интервал результата  $I_\beta$ .

При построении доверительного интервала решается задача об абсолютном отклонении:

$$p(|a^* - a| \leq \varepsilon) = p(\Delta a \leq \varepsilon) = F(\varepsilon) - F(-\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x) dx = \beta \quad (5.8.2.)$$

Таким образом, если известен закон распределения оценки  $a^*$ , то задача определения доверительного интервала решается довольно просто.

Рассмотрим построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины с известным генеральным стандартом  $\sigma_x$ .

Понятие генерального стандарта тесно связано с понятием точности прибора. **Класс точности прибора** – это выраженная в процентах относительная предельная погрешность измерения величины, равной пределу измерения прибора. В измерительной технике в большинстве отраслей промышленности под предельной погрешностью понимается величина, равная двум среднеквадратическим отклонениям

(ПРИМЕР: класс точности прибора  $K = \frac{\Delta a}{a_{max}} = 0.01$  (1%) манометр с максимальным значением давления по шкале 100 кгс/см<sup>2</sup>, абсолютная погрешность прибора  $\Delta a = \text{abs}(a - a^*) = 100 * 0.01 = 1$  ат  $\Delta a = 2\sigma_x$ , следовательно,  $\sigma_x = 0,5$  ат).

Пусть имеется выборка объема  $n$  значений случайной величины. Оценкой  $m_x$  является среднее выборки:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Для построения доверительного интервала необходимо знать распределение этой оценки. Для выборок из генеральной совокупности, распределенной нормально можно показать, что  $\bar{x}$  также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $m_x$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{n}$ . Тогда

$$P(|\bar{x} - m_x| \leq \varepsilon) = \beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right). \quad (5.8.3.)$$

Задавшись доверительной вероятностью, определим по таблице значение функции Лапласа  $k_\beta = \varepsilon_\beta / \sigma_{\bar{x}}$ . Тогда доверительный интервал для математического ожидания будет иметь вид

$$\bar{x} - k_\beta \sigma_{\bar{x}} \leq m_x \leq \bar{x} + k_\beta \sigma_{\bar{x}} \quad \text{или} \quad \bar{x} - k_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq m_x \leq \bar{x} + k_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Из оценки видно, что уменьшение доверительного интервала обратно пропорционально квадратному корню из числа наблюдений. Следовательно, если надо уменьшить возможную ошибку в два раза надо увеличить число наблюдений в 4 раза.

Если закон распределения оценки не известен, то в математической статистике применяют обычно два метода:

1) приближенный – при  $n$  более 50 заменяют неизвестные параметры их оценками;

2) от случайной величины  $a^*$  переходят к другой случайной величине, закон распределения которой не зависит от оцениваемого параметра  $a$ , а зависит только от объема выборки  $n$  и от вида распределения величины  $X$ . Такого рода величины наиболее подробно изучены для нормального закона. В качестве доверительных границ берут симметричные квантили

$$a^*_{(1-\beta)/2} \leq a \leq a^*_{(1+\beta)/2},$$

Если выразить через  $p$ ,

$$a^*_{p/2} \leq a \leq a^*_{1-p/2}.$$

На практике, как правило, число измерений конечно и не превышает 10...30. При малом числе измерений фактическая дисперсия  $\sigma_x^2$  неизвестна, поэтому для построения доверительного интервала математического ожидания используют выборочную дисперсию  $S_x^2$  и приведенную случайную величину:

$$t = \frac{\bar{x} - m_x}{s_x/\sqrt{n}}$$

$t$  – случайная величина, имеющая распределение, отличное от нормального, зависящее от числа степеней свободы ( $t$  – распределение или распределение Стьюдента). При больших значениях  $n$  распределение Стьюдента приближается к стандартному нормальному распределению. И, по аналогии, получаем построение доверительного интервала

$$\bar{x} - \frac{t_{\alpha,m} s_x}{\sqrt{n}} \leq m_x \leq \bar{x} + \frac{t_{\alpha,m} s_x}{\sqrt{n}}$$

### 5.9. Определение необходимого количества опытов

Необходимое количество измерений (образцов, проб и т.д.)  $n$  можно определить заранее в том случае, когда известно действительное значение среднеквадратического отклонения, а

экспериментальные данные подчиняются нормальному закону распределения.

Действительно, при этих допущениях число измерений можно определить из системы неравенств:

$$\bar{x} - k_{\beta} \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \leq m_x \leq \bar{x} + k_{\beta} \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}.$$

Анализируя формулу доверительного интервала, можно заметить, что:

а) увеличение объема выборки  $n$  приводит к уменьшению длины доверительного интервала;

б) увеличение доверительной вероятности  $\beta$  приводит к увеличению длины доверительного интервала, т.е. к уменьшению точности  $\varepsilon = k_{\beta} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ ;

в) если задать точность  $\varepsilon$  и доверительную вероятность  $\beta$ , то из соотношения  $\varepsilon = k_{\beta} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$  можно найти минимальный объем выборки, который обеспечивает заданную точность.

Однако, в эксперименте значение  $\sigma_x$  оценивают, исходя из конечного числа измерений, количество которых обычно не превышает 5-10. Поэтому точность оценивания  $\sigma_x$  невелика. Это вносит дополнительную неопределенность в окончательный результат. Чтобы ее учесть, необходимо расширить границы доверительного интервала, заданного для точно известной величины  $\sigma_x$ . Понятно, что меньшему количеству отдельных измерений должен соответствовать более широкий доверительный интервал. Поэтому на практике используется формула

$$\bar{x} - t_{\alpha, m} S_{\bar{X}} \leq m_x \leq \bar{x} + t_{\alpha, m} S_{\bar{X}},$$

Где  $t_{\alpha, m}$  - квантиль распределения Стьюдента, определяемый уровнем значимости  $\alpha$  и количеством степеней свободы  $m = n - 1$ .

### 5.10. Проверка статистических гипотез

Проверка статистических гипотез является одной из основных задач математической статистики. Суть этой задачи состоит в том, что на основании выборочных данных должно быть принято (или отвергнуто) некоторое предположение (**статистическая гипотеза**) относительно генеральной совокупности.



Процедура сопоставления гипотезы с выборочными данными называется **проверкой гипотез**.

Задача статистической проверки ставится в следующем виде: относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза  $H$ . Из генеральной совокупности извлекается выборка. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос, следует ли принять гипотезу  $H$ , либо отклонить ее. Например, эффективнее ли лекарство, испытанное на определенном числе людей, по сравнению с другими способами лечения? Аналогичен вопрос о новых правилах приема в вуз, методах обучения, преимуществах новой разрабатываемой техники т.п.

Выдвигаемая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает задача ее проверки.

Под **статистической гипотезой** понимают всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы делятся на **параметрические** (гипотезы о параметрах распределения) и **непараметрические** (о виде неизвестного распределения)

Одну из гипотез выдвигают в качестве основной  $H_0$ , а другую, являющуюся логическим отрицанием  $H_0$ , т.е. противоположную  $H_0$ , - в качестве конкурирующей (альтернативной) и обозначают  $H_1$ .

Имея две гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  надо на основе выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  принять либо основную гипотезу  $H_0$ , либо конкурирующую  $H_1$ .

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу, называют **статистическим критерием** проверки гипотезы.

Для проверки гипотезы на основании выборки формируют функцию выборки  $T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , которая называется **статистикой критерия**.

Основной **принцип проверки гипотез** состоит в следующем. Множество возможных значений статистики критерия  $T_n$  разбивается на два непересекающихся подмножества: **критическую область**  $S$ , т.е. область отклонения гипотезы  $H_0$  и область  $\bar{S}$  принятия этой гипотезы. Если фактически полученное по выборке значение статистики критерия попадает в критическую область, то основная гипотеза  $H_0$  отклоняется, и принимается альтернативная гипотеза  $H_1$ .

Если значение критерия попадает в  $\bar{S}$ , то принимается  $H_0$ ,  $H_1$  отклоняется.

При проверке гипотезы могут быть допущены ошибки двух типов:

**Ошибка первого рода** состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза, когда на самом деле она верна.

**Ошибка второго рода** состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза  $H_1$ , когда на самом деле она верна.

Вероятность ошибки первого рода (обозначается  $\alpha$ ) называется **уровнем значимости критерия**:

$$\alpha = P(H_1|H_0)$$

Чем меньше  $\alpha$ , тем меньше вероятность отклонить верную гипотезу. Допустимую ошибку первого рода обычно задают заранее. Обычно для  $\alpha$  используют стандартные значения  $\alpha=0,05; 0,01; 0,005; 0,001$ .

**Вероятность ошибки второго рода** (обозначается  $\beta$ ):

$$\beta = P(H_0|H_1).$$

Величину  $1-\beta$ , т.е. вероятность недопущения ошибки второго рода (отвергнуть неверную гипотезу  $H_0$ , принять верную  $H_1$ ), называют **мощностью критерия**.

Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Последствия ошибок 1-го, 2-ого рода совершенно различны:

-применительно к радиолокации говорят, что  $\alpha$  – вероятность пропуска сигнала,  $\beta$  – вероятность ложной тревоги;

-применительно к производству –  $\alpha$  – риск поставщика (т.е. забраковка по выборке всей партии изделий, удовлетворяющих стандарту),  $\beta$  – риск потребителя (т.е. прием по выборке всей партии изделий, не удовлетворяющих стандарту);

-применительно к судебной практике, ошибка 1-ого рода приводит к оправданию виновного, ошибка 2-ого рода - осуждению невиновного.

Отметим, что одновременное уменьшение ошибок 1-ого и 2-ого рода возможно лишь при увеличении объема выборок. Поэтому обычно при заданном уровне значимости отыскивается критерий с наибольшей мощностью.

### 5.10.1 Отсев грубых погрешностей наблюдений

В случае отсева грубых погрешностей (ошибок) нулевая гипотеза формулируется следующим образом:

$H_0$ : «Среди результатов наблюдений (выборочных, опытных данных) нет резко выделяющихся (аномальных) значений»

Альтернативной гипотезой может быть

Либо  $H_1$ : «среди результатов наблюдений есть только одна грубая ошибка»,

Либо  $H_1$ : «среди результатов наблюдений есть две или более грубых ошибок».

#### Критерий Н.В.Смирнова

Если известно, что есть только одно аномальное значение, то оно будет крайним членом вариационного ряда (т.е. ряда наблюдений, расположенных в возрастающей последовательности:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ). Поэтому проверять выборку на наличие одной грубой ошибки естественно при помощи статистики

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s_x}, \quad (5.10.1)$$

Если сомнения вызывает первый член вариационного ряда  $x_1 = \min x_i$ , или

$$u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s_x}, \quad (5.10.2.)$$

Если сомнителен максимальный член вариационного ряда  $x_n = \max x_i$ .

Н.В.Смирновым исследовалось распределение указанных статистик (5.10.1) и (5.10.2) и были составлены таблицы точек  $u_{\alpha,n}$  (квантили порядка  $p = 1 - \alpha$ ) для  $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01$  при объеме выборки от 3 до 20 опытов.

При выбранном уровне значимости  $\alpha$  критическая область для критерия Н.В.Смирнова строится следующим образом:

$$u_1 > u_{\alpha,n} \text{ или } u_n > u_{\alpha,n}$$

$u_{\alpha,n}$  - это табличное значение. В случае, когда выполняется условие (статистика попадает в критическую область), то нулевая гипотеза отклоняется, т.е. выброс  $x_1$  или  $x_n$  не характерен для данной выборки, после чего значения  $x_1$  или  $x_n$  исключают из рассмотрения, а найденные ранее оценки подвергаются корректировке с учетом отброшенного результата.

### 5.10.2. Сравнение двух рядов наблюдений

При проведении и анализе результатов экспериментальных исследований часто приходится сравнивать две партии изделий, показания двух или нескольких приборов, анализировать результаты работы однотипных установок, сравнивать результаты проб материалов и т.д. вот некоторые примеры подобных ситуаций:

1. Необходимо сравнить показания двух приборов, измеряющих одну и ту же величину, когда этими средствами получено два ряда наблюдений данной величины. Одинакова ли точность измерения одного и того же технологического параметра разными приборами.

2. Требуется поверить рабочее средство измерения (т.е. проверить, выходит ли погрешность прибора за пределы регламентированных значений) с помощью образцового средства измерения. Равно ли математическое ожидание показаний прибора действительному значению измеряемого параметра?

3. Два агрегата выпускают одну и ту же продукцию. Необходимо сделать вывод о том, какой из них лучше или хуже в каком-либо смысле. Решение подобных задач осуществляется с использованием аппарата проверки статистических гипотез.

### 5.10.3. Проверка однородности дисперсий

Такую операцию приходится выполнять, когда сопоставляются результаты нескольких выборок. Величина рассеяния характеризует такие исключительно важные показатели, как точность машин, приборов, стабильность технологических процессов, качество готовой продукции и т.д. Поэтому, например, о преимуществах той или иной технологии или о качестве выпускаемой продукции можно сделать вывод в результате сравнения дисперсий тех параметров, которые их характеризуют.

Для решения задач такого типа требуется установить, являются ли выборочные дисперсии  $S_1^2 \neq S_2^2$  со степенями свободы  $m_1$  и  $m_2$  значимо отличающимися или же они характеризуют выборки,

взяты из одной и той же генеральной совокупности или из генеральных совокупностей с равными дисперсиями. В этом случае нулевая гипотеза формулируется так: между двумя дисперсиями различия нет при заданном уровне значимости  $\alpha$  ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ).

Для проверки этой гипотезы используется **критерий Фишера**, зависящий от числа степеней свободы  $m_1$  и  $m_2$ .

Поскольку для проверки нуль-гипотезы  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , т.е. требуется проверить, что две выработки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, то выражение можно представить как отношение выборочных дисперсий

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ где } S_1^2 > S_2^2.$$

Очевидно, что  $F$  всегда больше единицы. Выбирается уровень значимости  $\alpha$ . Нулевую гипотезу принимают, если  $F \leq F_{\alpha, m_1, m_2}$ .  $F_{\alpha, m_1, m_2}$  определяется по таблицам квантилей  $F$ -распределения Фишера для числа степеней свободы  $m_1 = n_1 - 1$  и  $m_2 = n_2 - 1$  и уровня значимости.

#### 5.10.4. Проверка однородности нескольких дисперсий

Критерий Фишера используется для сравнения только двух дисперсий, однако на практике приходится сравнивать между собой три и более дисперсий.

При сопоставлении дисперсий ряда выборок нулевая гипотеза заключается в том, что  $k$  совокупностей, из которых взяты выборки, имеют равные дисперсии. То есть проверке подлежит предположение, что все эмпирические дисперсии  $S_1^2, S_2^2 \dots S_k^2$  относятся к выборкам из совокупности с одной и той же генеральной дисперсией  $\sigma^2$ .

Пусть среди выборочных дисперсий обнаружена такая, которая значительно больше всех остальных  $S_{max}^2$ . Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли считать отличие выделенной дисперсии

$S_{max}^2$  существенными. Альтернативная гипотеза может быть выбрана как  $H_1: \sigma_{max}^2 > \sigma^2$ .

При равном объеме выборок  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$  для всех  $k$  выборок может быть использован **критерий Кохрена**. Статистика критерия Кохрена  $G$  рассчитывается как

$$G = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^k S_i^2}$$

Далее для выбранного уровня значимости  $\alpha$  определяется табличное значение этого критерия, который зависит от числа степеней свободы  $m = n - 1$  и числа сравниваемых дисперсий  $k: G_{\alpha; m; k}$ . Критическая область строится как  $G \geq G_{\alpha; m; k}$ . При  $G < G_{\alpha; m; k}$  нулевая гипотеза принимается, т.е. отличие выделенной дисперсии считается несущественной.

В случае подтверждения однородности дисперсий можно сделать оценку обобщенной дисперсии  $\sigma^2$ :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{k}$$

Критерий Кохрена используется только в тех случаях, когда все сравниваемые дисперсии имеют одинаковое число степеней свободы (одинаковые объемы выборок). Если же число измерений в различных сериях неодинаково, то для проверки однородности дисперсий обычно выбирается **критерий Бартлета**. Введем обозначения для общего числа степеней свободы:  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ; и средневзвешенной дисперсии:  $S_y^2 = \frac{S_1^2 f_1 + \dots + S_n^2 f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2 f_i}{f}$ .

Бартлет показал, что в условиях нулевой гипотезы отношение  $\frac{B}{C}$ , где

$$B = 2.303(f \lg(S_y^2) - \sum_{i=1}^n f_i \lg(S_i^2)),$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right)$$

распределено приближенно как  $\chi^2$  с  $n-1$  степенями свободы, если все  $f_i > 2$ .

Гипотеза равенства генеральной дисперсии принимается, если

$$\frac{B}{C} \leq \chi_\alpha^2$$

при выбранном уровне значимости  $\alpha$ .

В этом случае различие между выборочными дисперсиями можно считать незначимым, а сами выборочные дисперсии однородными.

Так как  $C > 1$ , если  $B \leq \chi_\alpha^2$ , то нулевую гипотезу следует принять. Если  $B > \chi_\alpha^2$ , то критерий Бартлетта вычисляются полностью.

### 5.10.5. Проверка гипотез о числовых значениях математических ожиданий

Для решения вопроса о соответствии произведенной продукции определенным требованиям (например, ГОСТ или ТУ), или выявлении преимуществ новой разработки по сравнению с существующими аналогами, возникает необходимость по выборочным средним значениям исследуемых случайных величин делать вывод о соответствующих им генеральных значениях математических ожиданий.

При этом может возникнуть задача (1) сравнения неизвестного математического ожидания  $M_1$ , для которого получена оценка через выборочное среднее  $\bar{x}_1$  с конкретным числовым значением  $M$  (например, с известным математическим ожиданием) или задача (2) сравнения двух математических ожиданий  $M_1$  и  $M_2$ , оцененным по двум выборочным средним  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ .

**В первом случае** в качестве нулевой гипотезы выдвигается предположение о том, что оцененное математическое ожидание  $M_1$  равно известному математическому ожиданию  $M$  ( $H_0: M_1 = M$ ). В качестве альтернативной примем  $H_1: M_1 \neq M$

Если генеральная дисперсия  $\sigma^2$  неизвестна и для нее сделана оценка  $S^2$ , то используется t-критерий (распределения Стьюдента). t-

статистика имеет вид:  $t = \frac{\bar{x} - M}{S} \sqrt{n}$ . Как и при построении доверительного интервала для математического ожидания, выбирается уровень значимости  $\alpha$ . Для числа степеней свободы  $m = n - 1$  (с которым сделана оценка дисперсии) устанавливаются границы критической области по табличным значениям квантилей  $t$ -распределения. Нулевую гипотезу принимают, т.е. полагают, что  $M_1 = M$  при выполнении неравенства:  $|t| \leq t_{\alpha, m}$ .

В задаче (2), где сравниваются два неизвестных математических ожидания  $M_1$  и  $M_2$ , прежде всего необходимо убедиться, что исследуемые выборки независимы между собой. После чего, для двух нормально распределенных генеральных совокупностей с неизвестными параметрами  $M_1, \sigma_1^2$ , и  $M_2, \sigma_2^2$ , которые характеризуются независимыми выборками объемом, соответственно,  $n_1$  и  $n_2$ , для сравнения выборочных средних  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  выдвигается нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий:  $H_0: M_1 = M_2$ . Альтернативную можем сформулировать как  $H_1: M_1 \neq M_2$ .

Как и в предыдущей задаче, используем  $t$ -критерий. Вид  $t$ -статистики зависит от того, равны  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ , либо не равны  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  между собой генеральные дисперсии (для ответа на этот вопрос можно воспользоваться критерием Фишера).

В первом случае (когда дисперсии не имеют значимого отличия) статистика принимает вид

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

двухвыборочный  $t$ -критерий с равными дисперсиями, где  $S$  – обобщенное среднее квадратичное отклонение.

Во втором случае, когда дисперсии значимо отличаются друг от друга, статистика имеет вид:



$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}}}$$

двухвыборочный t-критерий с неравными дисперсиями.

В зависимости от условия решаемой задачи выбирается необходимый уровень значимости  $\alpha$ . Границы критической области устанавливаются по табличным значениям квантилей t-распределения. При этом число степеней свободы рассчитывается как  $m = n_1 + n_2 - 2$ .

Нулевую гипотезу принимают при выполнении неравенства  $|t| \leq t_{\alpha, m}$ .

### **5.11. Критерии согласия. Проверка гипотез о виде функции распределения**

Рассмотренные ранее методы проверки статистических гипотез выполнялись в предположении, что известна функция распределения (нормальный закон). Однако в большинстве случаев вид закона требует статистического подтверждения.

Наиболее простым и весьма приближенным методом проверки согласия результатов эксперимента с тем или иным законом распределения является графический метод. Он заключается в оценке эмпирической функции распределения и сопоставлении ее с функцией предполагаемого теоретического закона. Если построенные экспериментальные точки лежат вблизи теоретического графика, то можно считать, что полученные в опытах данные не противоречат выбранному теоретическому закону распределения. Графический метод является в значительной мере субъективным и используется на практике в качестве первого приближения при решении подобных задач.

Более объективные методы установления вида распределения случайной величины строятся на аппарате проверки статистических гипотез – критериях согласия.

Нулевая гипотеза в данном случае заключается в том, что  $H_0$ : - исследуемая генеральная совокупность не противоречит предлагаемому теоретическому закону распределения. При этом альтернативная гипотеза обычно формулируется как  $H_1$ : случайная величина имеет любое другое распределение, отличное от предлагаемого.

Сравнение экспериментального материала с некоторым видом теоретического распределения осуществляется с помощью различных критериев согласия: хи-квадрат (Пирсона), Колмогорова-Смирнова и др.

### 5.11.1. Критерий Пирсона

Для проверки согласованности распределений, полученных по выборке с некоторой теоретической плотностью распределения.

Для стандартного нормального распределения теоретическая вероятность попадания случайной величины в интервал  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$  определяется по формуле

$$P_i^* = F(z_{i+1}) - F(z_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_i}^{z_{i+1}} e^{-u^2/2} du.$$

Отличие оценки закона распределения  $P$  от теоретического закона распределения  $P^*$  можно охарактеризовать величиной

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n C_i (P_i - P_i^*)^2,$$

Где  $P_i$  и  $P_i^*$  - оценка и теоретическая вероятность случайной величины для  $i$ -ого интервала;  $C_i$  - весовые коэффициенты, которые с большим весом учитывают отклонения для меньших  $P_i$ .

Пирсон выбрал весовые коэффициенты следующим образом:

$$C_i = \frac{n}{P_i^*}$$

Пирсон показал, что при таком выборе  $C_i$  закон распределения  $\chi^2$  слабо зависит от  $n$  и  $P(x)$ , а определяется в основном числом разрядов  $k$  (количеством интервалов).

Следовательно,

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i - P_i^*)^2}{P_i^*} = n \sum_{i=1}^k \frac{(\frac{\bar{m}_i}{n} - P_i^*)^2}{P_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{m}_i - nP_i^*)^2}{nP_i^*}.$$

Очевидно, что при идеальном соответствии экспериментальных данных нормальному закону, экспериментальное значение критерия Пирсона будет равно нулю, т.к.  $P_i = P_i^*$ .

Алгоритм использования критерия Пирсона заключается в следующем:

1. Выдвигается нуль-гипотеза: «Отличие экспериментальных данных от нормального закона распределения не существенно» и альтернативная гипотеза: «Отличие экспериментальных данных от нормального закона распределения существенно, т.е. экспериментальные данные не подчиняются закону нормального распределения».

2. По результатам экспериментальных измерений и предположению нормального закона их распределения определяется расчетное значение критерия Пирсона.

3. Определяют число степеней свободы  $m$ , задаются уровнем значимости  $\alpha$  и определяют теоретическое значение критерия Пирсона  $\chi_{\alpha; m}^2$ .

4. Если  $\chi^2 < \chi_{\alpha; m}^2$ , то нуль-гипотеза о нормальном законе распределения экспериментальных данных принимается с доверительной вероятностью  $p = 1 - \alpha$ . В противном случае нуль-гипотеза отвергается и принимается альтернативная.

### 5.11.2. Критерий Колмогорова

Наряду с критерием согласия Пирсона применяются и другие критерии, например, Колмогорова, Романовского и др.

Колмогоров доказал, что независимо от функции распределения вероятностей при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

Значения этой вероятности табулированы.

Суть критерия согласия Колмогорова заключается в следующем. Устанавливается максимальная величина модуля разности между статистической и теоретической функциями распределения вероятностей

$$D = |F^0(x) - F(x)|_{max}$$

и определяется величина

$$\lambda = D\sqrt{n}$$

где  $n$  – число независимых наблюдений, и по таблице находится вероятности  $P(\lambda)$ .

**Величина этой вероятности  $P(\lambda)$  свидетельствует о том, что за счет случайных причин вероятность максимального расхождения между функциями распределения будет не меньше  $P(\lambda)$ .**

Если вероятность мала, гипотезу следует отвергнуть, при больших значениях вероятности эту гипотезу следует считать, как не противоречащую опытным данным.

### 5.11.3. Критерий однородности статистического материала

Критерий однородности еще носит название **критерий принадлежности** выборок к одной генеральной совокупности.

Суть этого критерия сводится к следующему. В практике обработки результатов наблюдений не всегда эти результаты получены в одном эксперименте. Однородные результаты, т.е. результаты одной физической величины могут быть получены при проведении различных экспериментов и, может быть, даже в различных условиях. И задача сводится к решению вопроса, являются ли эти результаты **однородными** и можно ли их обрабатывать совместно? Если это отобразить визуально, то получим картину, показанную на рис. 5.11.1. Если говорить на языке теории множеств, задача сводится к установлению критерия, по которому можно установить, принадлежат ли подмножества  $B_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 7$  одному и тому же множеству, называемому генеральной совокупностью.

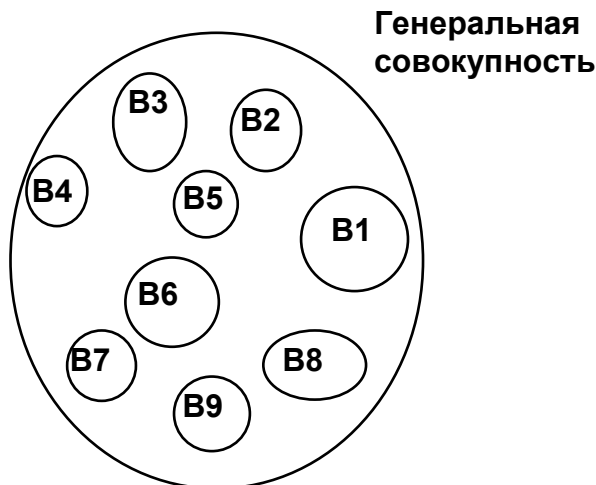


Рис.5.11.1 – К определению критерия однородности

Теперь перейдем к математической постановке задачи. Предположим, что проведено  $s$  последовательных экспериментов, состоящих соответственно из  $n_1, n_2, \dots, n_s$  единичных наблюдений. При этом числа  $n_j$  не случайны, а рассматриваются как заданные. В каждом эксперименте наблюдается некоторый переменный признак, и результаты каждого ряда наблюдений разбиваются по значению этого признака на  $r$  групп. Количество результатов наблюдений в  $i$ -ой группе  $j$ -го ряда обозначим  $v_{ij}$ . Тогда полученные данные могут быть расположены в таблице вида:

Таким образом, таблица представляет результат  $s$  независимых рядов наблюдений, каждому из которых соответствует один столбец.

Задача сводится к проверке гипотезы о том, что  $s$  выборок, представленных столбцами таблицы, извлечены из одной и той же совокупности, или, говоря иначе, эти данные являются однородными.

Таблица 5.11.1.

Признак	Ряд 1 2 3 ... s	Сумма
1	$v_{11} \ v_{12} \ v_{13} \ \dots \ v_{1s}$	$v_{1@}$
2	$v_{21} \ v_{22} \ v_{23} \ \dots \ v_{2s}$	$v_{2@}$
3	$v_{31} \ v_{32} \ v_{33} \ \dots \ v_{3s}$	$v_{3@}$
.	.....	.
.	.....	.
.	.....	.
r	$v_{r1} \ v_{r2} \ v_{r3} \ \dots \ v_{rs}$	$v_{r@}$
Сумма	$v_{@1} \ v_{@2} \ v_{@3} \ \dots \ v_{@s}$	N

Такая гипотеза эквивалентна (равносильна) гипотезе о том, что существует  $r$  постоянных  $p_1, p_2, \dots, p_r$  и таких, что  $\sum_i p_i = 1$ , и вероятность принадлежности отдельного результата к  $i$ -ой группе во всех  $s$  последовательностях равна  $p_i$ .

Для проверки этой гипотезы воспользуемся распределением Пирсона и запишем его в виде

$$\chi^2 = n \sum_{i,j} \frac{(v_{ij} - v_{i@}v_{@j}/n)^2}{v_{i@}v_{@j}} = n \left[ \sum_{ij} \frac{v_{ij}^2}{v_{i@}v_{@j}} - 1 \right],$$

имеющим  $(r-1)(s-1)$  число степеней свободы.

Эту зависимость можно распространить и на случай, когда рассматривается  $s$  независимых выборок по  $n_1, n_2, \dots, n_s$  элементов, разбитых на одинаковое число  $r$  групп, и с помощью метода минимума  $\chi^2$ , примененного к выражению

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(v_{ij} - n_j p_i)^2}{n_j p_i}$$

$p_i$  определяется некоторое число  $t$  неизвестных параметров.

Известно, что закон Пирсона имеет предельное распределение с  $(r-1)s-t$  степенями свободы, и в общем случае имеем дело с гипотезой о том, что все  $s$  выборок извлечены из одной и той же совокупности без дальнейшего уточнения вида распределения этой совокупности, так что параметрами являются сами вероятности. Благодаря соотношению  $\sum_i p_i = 1$  имеем  $t = r - 1$  параметров, так что получаем  $(r-1)(s-1)$  степеней свободы.

Распределение Пирсона (распределение  $\chi^2$ ) можно использовать также для проверки гипотезы о том, что заданные или имеющиеся  $s$  выборок извлечены (принадлежат) одной и той же совокупности заданного типа, например, имеющих распределение Гаусса, Пуассона или какое-то другое.

В этом случае применение метода минимума  $\chi^2$  показывает, что параметры распределения вероятностей отыскиваются так же, как и в случае одной выборки с групповыми частотами, равными суммам

строк  $v_{i@}$ ,  $i=1,2, \dots, r$  в приведенной выше таблице. В частном случае при  $r=2$  таблицу можно записать в виде, приведенном ниже.

$v_1$	$v_2$	.....	$v_s$	$\sum_j v_j$
$n_1 - v_1$	$n_2 - v_2$	.....	$n_s - v_s$	$n - \sum_j v_j$
$n_1$	$n_2$	.....	$n_s$	$N$

В этом случае получаем  $s$  последовательностей наблюдений, в каждом из которых некоторое событие, скажем,  $E$  осуществляется соответственно  $v_1, v_2, \dots, v_s$  раз, и надо установить, есть ли основания полагать, что событие  $E$  во всех этих наблюдениях имеет одну и ту же постоянную, хотя и неизвестную, вероятность  $p$ ? Оценкой для этой вероятности может служить частота события  $E$  во всей совокупности данных

$$p^* = 1 - q^* = \frac{1}{n} \sum_j v_j$$

и тогда распределение вероятностей по Пирсону запишется в виде

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(v_j - n_j p^*)^2}{n_j p^* q^*} = \frac{1}{p^* q^*} \sum_j \frac{v_j^2}{n_j} - n \frac{p^*}{q^*}$$

с  $s-1$  степенями свободы.

Величина

$$Q = \sqrt{\frac{n-1}{n(s-1)} \chi^2}$$

называется коэффициентом расхождения.

Рассмотрим случай, когда  $s=2$ , т.е. имеется две независимые выборки и нужно установить, принадлежат ли они одной и той же совокупности? Для этого случая таблицу можно представить в виде

$\mu_1$	$v_1$	$\mu_1 + v_1$
$\mu_2$	$v_2$	$\mu_2 + v_2$
·	·	·
$\mu_r$	$v_r$	$\mu_r + v_r$
$m$	$n$	$m+n$

Здесь имеется  $g-1$  степеней свободы, и распределение Пирсона запишется в виде

$$\chi^2 = mn \sum_i \frac{1}{\mu_i + \nu_i} \left( \frac{\mu_i}{m} + \frac{\nu_i}{n} \right)^2.$$

Обозначив в этом выражении

$$\frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i} = \omega_i, \quad \frac{m}{m+n} = \omega,$$

получим удобную для расчета зависимость

$$\chi^2 = \frac{1}{\omega(1-\omega)} \left( \sum_i \mu_i \omega_i - m\omega \right).$$

В качестве примера рассмотрим, например, доходы по возрастным группам рабочих и служащих, и мастеров в промышленности некоторой страны, приведенных ниже в таблице.

Доход, сотни дол.	Рабочие и служащие			Мастера		
	Возрастная группа		$\omega_i$	Возрастная группа		$\omega_i$
	40-50 $\mu_i$	50-60 $\nu_i$		40-50 $\mu_i$	50-60 $\nu_i$	
< 1	7831	7558	0,509	71	54	0,568
1-2	26740	20685	0,564	430	324	0,570
2-3	35572	24186	0,595	1072	894	0,545
3-4	20009	12280	0,619	1609	1202	0,572
4-5	11527	6776	0,629	1178	903	0,566
>5	6919	4222	0,621	158	112	0,585
<i>Итого</i>	108598	75707	0,589	4518	3489	0,564
			$\chi^2=840,62$ при 5 ст. св. $P<0,001$			
				$\chi^2=4,27$ при 5 с.с $P=0,51$		

Откуда следует: нет оснований считать, что выборки по мастерам не принадлежат к одной генеральной совокупности, т.е. они являются однородными. Этого сказать нельзя по первой группе-рабочих и служащих. Эти выборки неоднородны.



## 6. Анализ результатов эксперимента

### 6.1. Характеристика видов связей между рядами наблюдений

На практике большинство измерений связаны с установлением зависимости одних величин от изменения других. В таком случае целью эксперимента является получение функциональной зависимости. Для этого должны одновременно определяться значения  $x$  и соответствующие им значения  $y$ , а задачей эксперимента является построение математической модели исследуемой зависимости. Другими словами, речь идет об **установлении связи** между двумя рядами наблюдений.

Из всего многообразия связей обычно выделяют следующие два вида: **функциональные связи** (или зависимости) – при изменении одной величины **другая** изменяется так, что каждому значению  $x$  соответствует совершенно определенное (однозначное) значение  $y$ ;

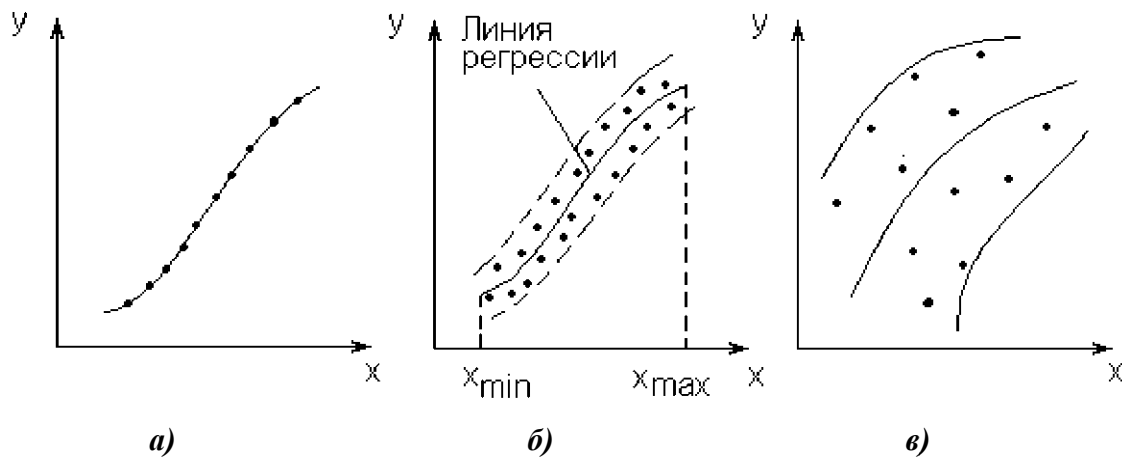


Рис.6.1. Функциональная и стохастическая связь

Однако, на практике такой вид связей встречается достаточно редко. Влияние отдельных случайных факторов может быть достаточно мало, но в совокупности они могут существенно влиять на результаты эксперимента. В этом случае отмечаем наличие стохастической (вероятностной) связи между переменными.

**Стохастические связи** характеризуются тем, что переменная  $y$  реагирует на изменение другой переменной (переменных)  $X$  изменением своего закона распределения. В результате зависимая переменная принимает не одно конкретное значение, а несколько из возможного множества значений; повторяя испытания, будем получать другие значения функции отклика, и одному значению  $x$  в различных реализациях будут соответствовать различные значения  $y$ .

На рис.6.1. б) – кривая зависимости, проходящая по центру полосы экспериментальных точек (математическому ожиданию), которые могут и не лежать на искомой кривой  $y=f(X)$ , и занимают некоторую полосу вокруг нее. Эти отклонения вызваны погрешностями измерений, неполнотой модели и учитываемых факторов, случайным характером самих исследуемых процессов и т.п.

Анализ стохастических связей приводит к различным постановкам задач статистического исследования зависимостей, которые упрощенно можно классифицировать следующим образом:

1) Задачи корреляционного анализа – исследование наличия взаимосвязей между отдельными группами переменных;

2) Задачи регрессионного анализа – задачи, связанные с установлением аналитических зависимостей между переменным  $y$  и одним или несколькими переменными  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , которые носят количественный характер;

3) Задачи дисперсионного анализа – задачи, в которых переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  носят качественный характер, а исследуется и устанавливается степень их влияния на  $y$ .

Стохастические зависимости характеризуются формой, теснотой связи, численными значениями коэффициентов уравнения регрессии.

Форма связи устанавливает вид функциональной зависимости  $\hat{y} = f(X)$  и характеризуется уравнением регрессии. Если уравнение связи линейное, имеем линейную многомерную зависимость:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i \quad (6.1)$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_k$  – коэффициенты уравнения.

Следует отметить, что задача выбора функциональной зависимости – неформальная. Решение о выборе той или иной математической модели остается за исследователем. Только

экспериментатор знает, для какой цели создается, и как в дальнейшем будет использоваться создаваемая модель.

В наш компьютерный век построение модели не является сложной задачей, если исследователь четко представляет цель и задачи исследования. Поэтому для уяснения сущности и упрощения выкладок остановимся на рассмотрении сущности метода наименьших квадратов.

## 6.2. Метод наименьших квадратов

Данный метод определения неизвестных коэффициентов уравнения регрессии был разработан Лежандром и Гауссом почти 200 лет назад.

Определение коэффициентов  $b_j$  методом наименьших квадратов основано на выполнении требования, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от соответствующих значений уравнения регрессии была минимальна. Математическая запись этого требования выглядит следующим образом:

$$\Phi(b_0, b_1, \dots, b_k) = \sum_{i=1}^n [f(x_i, b_0, b_1, \dots, b_k) - y_i]^2 \rightarrow \min_{b_j}$$

где  $n$  - число экспериментальных точек в рассматриваемом интервале изменения аргумента.

Необходимым условием минимума функции  $\Phi(b_0, b_1, \dots, b_k)$  является выполнение равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 0, \quad 0 \leq j \leq k$$

или

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i, b_0, b_1, \dots, b_k) - y_i] \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} = 0, \quad 0 \leq j \leq k$$

После преобразования получим

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, b_0, b_1, \dots, b_k) \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} = 0.$$

Система уравнений ( ) содержит столько же уравнений, сколько неизвестных коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_k$ , входит в уравнение регрессии, и называется в математической статистике **системой нормальных уравнений**.

Поскольку  $\Phi \geq 0$  при любых  $b_0, b_1, \dots, b_k$  величина  $\Phi$  обязательно должна иметь хотя бы один минимум. Поэтому, если система нормальных уравнений имеет единственное решение, оно и является минимумом для этой величины.

Расчет регрессионных коэффициентов методом наименьших квадратов можно применять при любых статистических данных, распределенных по любому закону.

### 6.3. Определение тесноты связи между случайными величинами

Определив уравнение теоретической линии регрессии, необходимо дать количественную оценку тесноты связи между двумя рядами наблюдений. Линии регрессии, изображенные на рис.6.1 (б и в) ...

При корреляционном анализе предполагается, что факторы и отклики носят случайный характер и подчиняются нормальному закону распределения.

Тесноту связи между случайными величинами характеризуется корреляционным отношением  $\rho_{xy}$ . Рассмотрим физический смысл этого показателя, для чего необходимо ввести некоторые понятия:

**Остаточная дисперсия** (остатки)  $S_{y \text{ ост}}^2$  - характеризует разброс экспериментально наблюдаемых точек относительно линии регрессии и представляет собой показатель ошибки предсказания параметра  $y$  по уравнению регрессии:

$$S_{y \text{ ост}}^2 = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2 = \frac{1}{n-1-k} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, b_0, b_1, \dots, b_k)]^2,$$

где  $l = k + 1$  - число коэффициентов уравнения модели.

**Общая дисперсия** (общий)  $S_y^2$  - характеризует разброс экспериментального материала относительно среднего значения, т.е. линии С (см.рис.6.2)

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}]^2,$$

$$\text{где } \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

**Средний квадрат отклонения** линии регрессии от среднего значения линии С (средний) :

$$S_y^{*2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}]^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n [f(x_i, b_0, b_1, \dots, b_k) - \bar{y}]^2.$$

Очевидно, что общая дисперсия  $S_y^2$  (сумма квадратов относительно среднего значения) равна остаточной дисперсии  $S_{y \text{ ост}}^2$  (сумма квадратов относительно линии регрессии) плюс средний квадрат отклонения линии регрессии  $S_y^{*2}$  (сумма квадратов, обусловленная регрессией).

$$S_y^2 = S_{y \text{ ост}}^2 + S_y^{*2}$$

Разброс экспериментально наблюдаемых точек относительно линии регрессии характеризуется безразмерной величиной – выборочным корреляционным отношением, которое определяет долю, которую привносит величина  $X$  в общую изменчивость случайной величины  $y$ .

$$\rho_{xy}^* = \sqrt{\frac{S_y^2 - S_{y \text{ ост}}^2}{S_y^2}} = \sqrt{\frac{S_y^{*2}}{S_y^2}} = \frac{S_y^*}{S_y}$$

Проанализируем свойства этого показателя.

1. В том случае, когда связь является не стохастической, а функциональной, корреляционное отношение равно 1, так как все точки корреляционного поля оказываются на линии регрессии, остаточная дисперсия равна  $S_{y \text{ ост}}^2 = 0$ , а  $S_y^{*2} = S_y^2$ .

2. Равенство нулю корреляционного отношения указывает на отсутствие какой-либо тесноты связи между величинами  $x$  и  $y$  для данного уравнения регрессии, поскольку разброс экспериментальных точек относительно среднего значения и линии регрессии одинаков, т.е.  $S_y^2 = S_{y \text{ ост}}^2$ .

3. Чем ближе расположены экспериментальные данные к линии регрессии, тем теснее связь, тем меньше остаточная дисперсия и тем больше корреляционное отношение.

Следовательно, корреляционное отношение может изменяться в пределах от 0 до 1.

Для рассмотрения сути изучаемого вопроса нами был рассмотрен простейший случай статистической обработки,

методология решения более сложных задач принципиально не отличается.

## 6.4. Регрессионный анализ

Как и корреляционный анализ, регрессионный включает в себя построение уравнения регрессии (например, методом наименьших квадратов) и статистическую оценку результатов.

При проведении регрессионного анализа принимаются следующие допущения:

1. Входной параметр  $x$  изменяется с весьма малой ошибкой. Появление ошибки в определении  $y$  объясняется наличием в процессе не выявленных переменных и случайных воздействий, не вошедших в уравнение регрессии.

2. Результаты наблюдений выходной величины – независимые нормально распределенные случайные величины.

3. При проведении параллельных опытов выборочные дисперсии должны быть однородны. При выполнении измерений в различных условиях возникает задача сравнения точности измерений, а это возможно осуществлять при наличии однородных дисперсий (т.е. принадлежности экспериментальных данных к одной генеральной совокупности).

После того, как уравнение регрессии найдено, необходимо провести статистический анализ результатов. Этот анализ состоит в установлении адекватности уравнения и проверке значимости коэффициентов уравнения.

### 6.4.1. Проверка адекватности модели

Регрессионная модель называется **адекватной**, если предсказываемые по ней значения  $y$  согласуются с результатами наблюдений. Так, построив линейную модель, мы хотим убедиться, что никакая другая модель не даст значительного улучшения в описании предсказания значений  $y$ . В основе процедуры проверки адекватности модели лежат предположения, что случайные ошибки наблюдений являются независимыми, нормально распределенными случайными величинами с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями.

Сформулируем нуль-гипотезу  $H_0$ : «Уравнение регрессии адекватно».

Альтернативная гипотеза  $H_1$ : «Уравнение регрессии неадекватно».

Для проверки этих гипотез принято использовать F-критерий Фишера. При этом общую дисперсию (дисперсию выходного параметра)  $S_y^2$  сравнивают с остаточной дисперсией  $S_{y \text{ ост}}^2$ . Определяется экспериментальное значение F- критерия:

$$F = \frac{S_y^2}{S_{y \text{ ост}}^2},$$

Который в данном случае показывает, во сколько раз уравнение регрессии предсказывает результаты опытов лучше, чем среднее  $y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = C = \text{const}$ . Если  $F > F_{\alpha; m_1, m_2}$  то уравнение регрессии адекватно. Чем больше значение  $F$  превышает  $F_{\alpha; m_1, m_2}$  для выбранного  $\alpha$  и числа степеней свободы  $m_1 = n - 1, m_2 = n - l$ , тем эффективнее уравнение регрессии.

Рассмотрим случай, когда для повышения надежности и достоверности осуществляется не одно, а  $m$  параллельных опытов (примем, что это число одинаковым для каждого фактора). Тогда общее число экспериментальных значений величины  $y$  составит  $N = n * m$ .

В этом случае оценка адекватности модели производится следующим образом:

1. определяется среднее из серии параллельных опытов:  $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m}$

2. рассчитываются значения параметра  $\hat{y}_i$  по уравнению регрессии

3. рассчитывается дисперсия адекватности:  $S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{n-l} \sum_{i=1}^n [\bar{y}_i - \hat{y}_i]^2$

4. определяются выборочные дисперсии для параллельных опытов  $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^m [y_{ij} - \bar{y}_i]^2}{m-1}$ .



5. Определяется дисперсия воспроизводимости  $S_{\text{воспр}}^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 / n$ . Число степеней свободы этой дисперсии равно  $M = n(m - 1)$ ;

6. Определяется экспериментальное значение критерия Фишера:  

$$F = S_{\text{ад}}^2 / S_{\text{воспр}}^2.$$

7. Определяется теоретическое значение критерия Фишера  $F_{\alpha; m_1, m_2}$ , где  $m_1 = n - l$ ;  $m_2 = n(m - 1)$ .

8. Если  $F < F_{\alpha; m_1, m_2}$ , то уравнение регрессии адекватно, в противном случае – нет.

#### 6.4.2. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Надежность оценок  $b_i$  уравнения регрессии можно охарактеризовать их доверительными интервалами  $\Delta b_i$ , в которых с заданной вероятностью находится истинное значение этого параметра.

Наиболее просто построить доверительные интервалы для коэффициентов линейного уравнения регрессии, т.е. коэффициенты  $b_i$ .

Для линейного уравнения среднеквадратическое отклонение  $i$ -ого коэффициента уравнения регрессии  $S_{b_i}$  можно определить по закону накопления ошибок

$$S_{b_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \right)^2 S_j^2}.$$

При условии, что  $s_{y1}^2 = s_{y2}^2 = \dots = s_{yn}^2 = s_{\text{воспр}}^2$ , получим для простейшего уравнения регрессии  $y = b_0 + b_1 x$ :

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{S_{\text{воспр}}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}},$$

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{S_{\text{восп}}^2 n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}}.$$

Проверка значимости коэффициентов выполняется по критерию Стьюдента. При этом в качестве нуль-гипотезы проверяется:  $i$ -ый коэффициент уравнения регрессии отличен от нуля.

Построим доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии

$$\Delta b_i = t_{\alpha; n-l} S_{b_i},$$

где число степеней свободы в критерии Стьюдента определяется по соотношению  $n-l$ . Потеря  $l=k+1$  степеней свободы обусловлена тем, что все коэффициенты рассчитываются зависимо друг от друга.

Тогда доверительный интервал для каждого из коэффициентов уравнения регрессии составит  $(b_i - \Delta b_i; b_i + \Delta b_i)$ . Чем уже доверительный интервал, тем с большей уверенностью можно говорить о значимости этого коэффициента.

Основное правило при построении доверительного интервала для коэффициентов: **«Если абсолютная величина коэффициента регрессии больше, чем его доверительный интервал, то этот коэффициент значим»**. Другими словами, если  $|b_i| > |\Delta b_i|$ , то  $b_i$  коэффициент значим, в противном случае – нет.

Незначимые коэффициенты исключаются из уравнения регрессии, а остальные коэффициенты пересчитываются заново, так как они зависимы и в формулы для их расчета входят разноименные переменные.

Задача сводится к определению критерия, позволяющего установить, принадлежат ли эти выборки одной генеральной совокупности?

## 7. Основы теории случайных процессов и их статистической обработки

### 7.1. Понятие случайной функции (процесса)

Теория вероятностей рассматривает случайные величины и их характеристики в "статике". Задачи описания и изучения случайных сигналов "в динамике", как отображения случайных явлений, развивающихся во времени или по любой другой переменной, решает теория случайных процессов.

Исследователю при изучении многих явлений приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися в процессе наблюдения с течением времени. Примеров таких случайных величин существует множество: сигнал на выходе радиоприемника под воздействием помех, колебания давления и расхода жидкости в трубопроводе, рейтинги политиков и т.д.

Такие случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, называются **случайными функциями**.

Раздел математики, изучающий случайные явления в динамике их развития, называется **теорией случайных функций (случайных процессов)**. Ее методы используются в теории автоматического управления, при обработке и передаче сигналов измерительных устройств, а также в экономике, теории массового обслуживания, планировании финансовой деятельности и т.п.

В процессе обработки и анализа экспериментальных данных инженеру-исследователю обычно приходится иметь дело с тремя типами сигналов, описываемых методами статистики. Во-первых, это информационные сигналы, отображающие физические процессы, вероятностные по своей природе, как, например, акты регистрации частиц ионизирующих излучения при распаде радионуклидов. Во-вторых, информационные сигналы, зависящие от определенных параметров физических процессов или объектов, значения которых заранее неизвестны, и которые обычно подлежат определению по данным информационным сигналам. И, в-третьих, это шумы и помехи, хаотически изменяющиеся во времени, которые сопутствуют информационным сигналам, но, как правило, статистически

независимы от них как по своим значениям, так и по изменениям во времени. При обработке таких сигналов обычно ставятся задачи:

- обнаружение полезного сигнала,
- оценка параметров сигнала,
- выделение информационной части сигнала (очистка сигнала от шумов и помех),
- предсказание поведения сигнала на некотором последующем интервале (экстраполяция).

**Случайный процесс** представляет собой функцию  $X(t)$ , которая отличается тем, что ее значения в произвольные моменты времени по координате  $t$  являются случайными. Строго с теоретических позиций, случайный процесс  $X(t)$  следует рассматривать как совокупность временных функций  $x_k(t)$ , имеющих определенную общую статистическую закономерность. При регистрации случайного процесса на определенном временном интервале осуществляется фиксирование единичной реализации  $x_k(t)$  из бесчисленного числа возможных реализаций процесса  $X(t)$ . Эта единичная **реализация** называется **выборочной функцией** случайного процесса  $X(t)$ . Отдельная выборочная функция не характеризует процесс в целом, но при определенных условиях по ней могут быть выполнены оценки статистических характеристик процесса. Примеры выборочных функций модельного случайного процесса  $X(t)$  приведены на рис. 7.1.

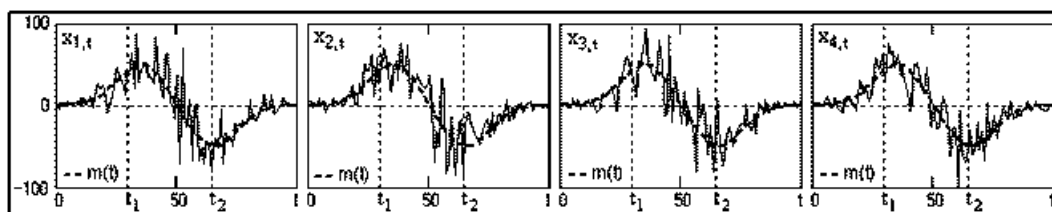


Рис. 7.1. Реализации случайного процесса

## 7.2. Характеристики случайного процесса

С практической точки зрения выборочная функция является результатом отдельного эксперимента, после которого данную реализацию  $x_k(t)$  можно считать детерминированной функцией. Сам случайный процесс в целом должен анализироваться с позиции бесконечной совокупности таких реализаций, образующих

**статистический ансамбль.** Полной статистической характеристикой процесса является  $N$ -мерная плотность вероятностей  $f(x_n; t_n)$ . Однако, как экспериментальное определение  $N$ -мерных плотностей вероятностей процессов, так и их использование в математическом анализе представляет значительные математические трудности. Поэтому на практике обычно ограничиваются одно- и двумерной плотностью вероятностей процессов.

Допустим, что случайный процесс  $X(t)$  задан ансамблем реализаций  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots\}$ . В произвольный момент времени  $t_1$  зафиксируем значения всех реализаций  $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$ . Совокупность этих значений представляет собой случайную величину  $X(t_1)$  и является одномерным сечением случайного процесса  $X(t)$ . Примеры сечений случайного процесса  $X(t)$  по 100 выборкам  $x_k(t)$  (рис. 7.1) в точках  $t_1$  и  $t_2$  приведены на рис. 7.2.

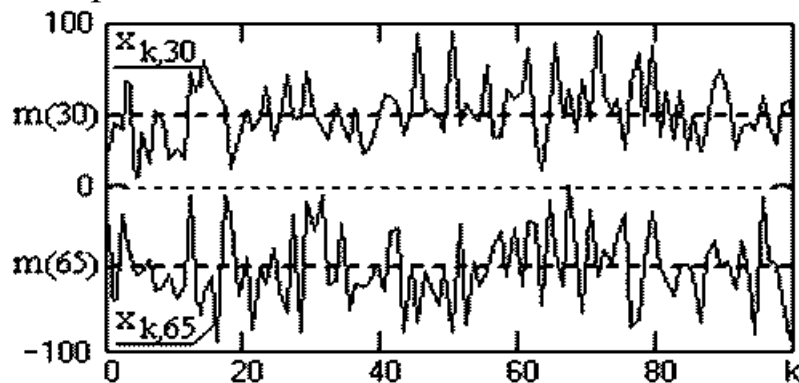


Рис. 7.2. Сечения случайного процесса  $X(t)$

**Одномерная функция распределения вероятностей  $F(x, t_i)$**  определяет вероятность того, что в момент времени  $t_i$  значение случайной величины  $X(t_i)$  не превысит значения  $x$ :

$$F(x, t_i) = P\{X(t_i) \leq x\}$$

Очевидно, что в диапазоне значений вероятностей от 0 до 1 функция  $F(x, t)$  является неубывающей с предельными значениями

$F(-\infty, t) = 0$  и  $F(\infty, t) = 1$ . При известной функции  $F(x, t)$  вероятность того, что значение  $X(t_i)$  в выборках будет попадать в определенный интервал значений  $[a, b]$  определяется выражением:

$$P\{a < X(t_i) \leq b\} = F(b, t_i) - F(a, t_i)$$

**Одномерная плотность распределения вероятностей  $f(x, t)$**  случайного процесса  $X(t)$  определяет вероятность того, что случайная величина  $x(t)$  лежит в интервале  $\{x \leq x(t) \leq x + dx\}$ . Она характеризует распределение вероятностей реализации случайной величины  $X(t_i)$  в произвольный момент времени  $t_i$  и представляет собой производную от функции распределения вероятностей:

$$f(x, t_i) = dF(x, t_i)/dx \quad (7.1)$$

Моменты времени  $t_i$  являются сечениями случайного процесса  $X(t)$  по пространству возможных состояний и плотность вероятностей  $f(x, t_i)$  представляет собой плотность вероятностей случайных величин  $X(t_i)$  данных сечений. Произведение  $f(x, t_i)dx$  равно вероятности реализации случайной величины  $X(t_i)$  в бесконечно малом интервале  $dx$  в окрестности значения  $x$ , откуда следует, что плотность вероятностей также является неотрицательной величиной.

При известной функции плотности вероятности вероятность реализации значения  $X(t_i)$  в произвольном интервале значений  $[a, b]$  вычисляется по формуле:

$$P \{a < X(t_i) \leq b\} = \int_a^b f(x, t_i)dx$$

Функция плотности вероятностей должна быть нормирована к 1, т.к. случайная величина обязана принимать какое-либо значение из числа возможных, образующих полное пространство случайных величин:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t_i)dx = 1$ .

Плотность распределения вероятностей, соответственно, определяет функцию распределения вероятностей:

$$F(x, t_i) = \int_{-\infty}^x f(x, t_i)dx$$

По известной плотности распределения вероятностей могут быть вычислены функции моментов случайного процесса, которые представляют собой математические ожидания соответствующих степеней (порядка) значений случайного процесса (**начальные моменты**)

$$M\{x^n(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t)f(x, t)dx$$

и значений флюктуационных составляющих процесса

(**центральные моменты**, моменты относительно центров распределения случайных величин):

$$\begin{aligned} M_0\{x^n(t)\} &= M\{[x(t) - M\{x(t)\}]^n\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - M\{x(t)\}]^n f(x, t) dx. \end{aligned}$$

В практике анализа случайных процессов используются, в основном, начальные моменты первого порядка и центральные моменты второго порядка.

**Математическое ожидание** является первым начальным моментом случайного процесса и представляет собой *статистическое усреднение* случайной величины  $X(t_i)$  в каком либо фиксированном сечении  $t_i$  случайного процесса. Соответственно, полная функция математического ожидания является теоретической оценкой среднего взвешенного значения случайного процесса по временной оси:

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (7.2)$$

Математическое ожидание  $m_x(t)$  представляет собой *неслучайную составляющую* случайного процесса  $X(t)$ . На рис. 7.1 и 7.2 неслучайные составляющие  $m(t)$  модели случайного процесса  $X(t)$  выделены пунктиром и соответствуют выборкам  $N \rightarrow \infty$ .

**Второй начальный момент** случайного процесса определяет его среднюю мощность:

$$w_x(t) = M\{X^2(t)\} = \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; t) dx, \quad (7.3)$$

**Функция дисперсии** случайного процесса. При анализе случайных процессов особый интерес представляет флуктуационная составляющая процесса, которая определяется разностью  $X(t) - m_x(t)$ . Функция дисперсии является теоретической оценкой среднего взвешенного значения разности  $[X(t) - m_x(t)]^2$ , т.е. является вторым центральным моментом процесса, и определяет мощность его флуктуационной составляющей:

$$\begin{aligned} D_x(t) &= M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = M\{X^2(t)\} - m_x^2(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_0(t)]^2 f(x; t) dx, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $x_0(t) = x(t) - m_x(t)$ .

**Функция среднего квадратического отклонения** служит амплитудной мерой разброса значений случайного процесса по временной оси относительно математического ожидания процесса:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \quad (7.5)$$

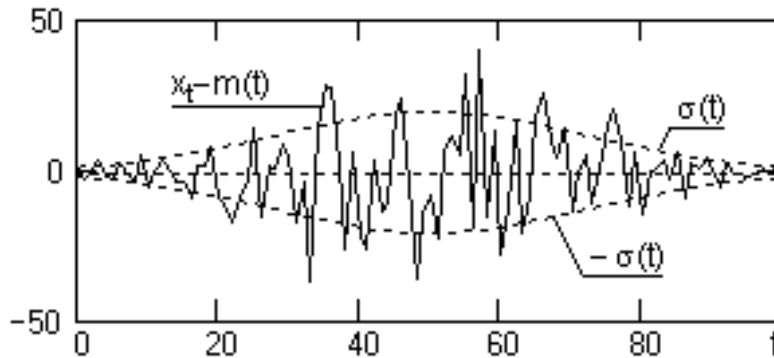


Рис.7.3. Флюктуационные составляющие случайного процесса

Учитывая последнее выражение, дисперсия случайной величины обычно обозначается  $\sigma^2$ .

На рис. 7.3 приведен пример флюктуационной составляющей процесса  $X(t)$  (рис. 7.1) в одной из реализаций в сопоставлении со средним квадратическим отклонением  $\pm\sigma$  случайных величин от математического ожидания  $m(t)$ .

Одномерные законы плотности распределения вероятностей случайных процессов не несут каких-либо характеристик связи между значениями случайных величин для различных значений аргументов.

**Двумерная плотность распределения вероятностей**  $f(x_1, t_1; x_2, t_2)$  определяет вероятность совместной реализации значений случайных величин  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  в произвольные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  что характеризует взаимосвязь случайного процесса в различные моменты времени и дает возможность определить характер изменения случайного процесса, т.е. динамику развития процесса во времени. Распределение описывает двумерную случайную величину  $\{X(t_i), X(t_j)\}$  в виде функции вероятности реализации случайной величины  $X(t_i)$  в бесконечно малом интервале  $dx_i$  в окрестностях  $x_i$  в момент времени  $t_i$  при условии, что в момент времени  $t_j$  значение  $X(t_j)$  будет реализовано в бесконечно малом интервале  $dx_j$  в окрестностях  $x_j$ :



$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\{x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1 \cap x_2 \leq x(t_2) \leq x_2 + dx_2\}.$$

С помощью двумерной плотности распределения вероятностей можно определить корреляционные функции процесса.

**Корреляционные функции случайных процессов.**

Характеристикой динамики изменения случайной величины  $X(t_i)$  является корреляционная функция, которая описывает случайный процесс в целом:

$$R_X(t_i, t_j) = M\{X(t_1) X(t_2)\}$$

Корреляционная функция представляет собой статистически усредненное произведение значений случайного процесса  $X(t)$  в моменты времени  $t_i$  и  $t_j$  по всем значениям временных осей  $t_i$  и  $t_j$  а, следовательно, тоже является двумерной функцией. В терминах теории вероятностей корреляционная функция является вторым начальным моментом случайного процесса.

На рис. 7.4 приведены примеры реализаций двух случайных процессов, которые характеризуются одной и той же функцией математического ожидания и дисперсии.

На рисунке видно, что хотя пространство состояний обоих процессов практически одно и то же, динамика развития процессов в реализациях существенно различается. Единичные реализации

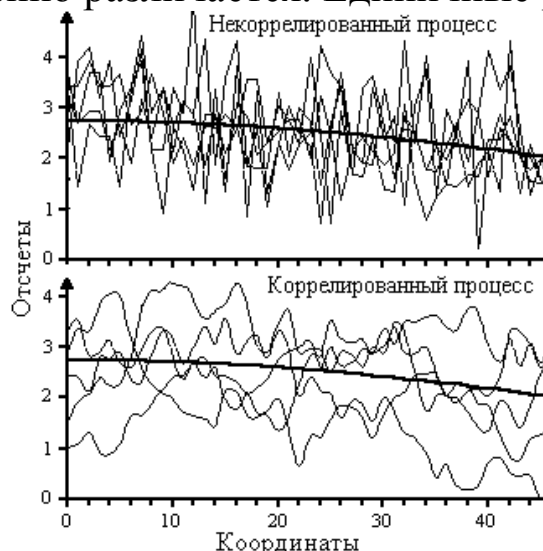


Рис.7.4. Сравнение двух случайных процессов

коррелированных процессов в произвольный момент времени могут быть такими же случайными, как и некоррелированных, а в

пределе, во всех сечениях оба процесса могут иметь один и тот же закон распределения случайных величин. Однако динамика развития по координате  $t$  (или любой другой независимой переменной) единичной реализации коррелированного процесса по сравнению с некоррелированным является более плавной, а, следовательно, в коррелированном процессе имеется определенная связь между последовательными значениями случайных величин. Оценка степени статистической зависимости мгновенных значений какого-либо процесса  $X(t)$  в произвольные моменты времени  $t_i$  и  $t_j$  и производится функцией корреляции. По всему пространству значений случайного процесса  $X(t)$  корреляционная функция определяется выражением:

$$R_X(t_i, t_j) = \iint_{-\infty}^{\infty} x(t_i)x(t_j)f(x_i, t_i; x_j, t_j)dx_i dx_j \quad (7.6)$$

При анализе случайных процессов второй момент времени  $t_j$  удобно задавать величиной сдвига  $\tau$  относительно первого момента, который при этом может быть задан в виде координатной переменной:

$$R_X(t, t + \tau) = M\{X(t)X(t + \tau)\} \quad (7.7)$$

Функция, задаваемая этим выражением, обычно называется **автокорреляционной функцией случайного процесса**.

**Ковариационные функции.** Частным случаем корреляционной функции является **функция автоковариации**, которая широко используется при анализе сигналов. Она представляет собой статистически усредненное произведение значений центрированной случайной функции  $X(t) - m_X(t)$  в моменты времени  $t_i$  и  $t_j$  и характеризует флюктуационную составляющую процесса:

$$K_X(t_i, t_j) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x(t_i) - m_x(t_i)) (x(t_j) - m_x(t_j)) f(x_i, t_i; x_j, t_j) dx_i dx_j \quad (7.8)$$

В терминах теории вероятностей ковариационная функция является вторым центральным моментом случайного процесса. При произвольных значениях  $m_x$  ковариационные и корреляционные функции связаны соотношением:

$$K_X(t, t + \tau) = R_X(t, t + \tau) - m_x^2(t)$$

Нормированная функция автоковариации (функция корреляционных коэффициентов):

$$\rho_X(t, t + \tau) = K_X(t, t + \tau) / [\sigma(t)\sigma(t + \tau)] \quad (7.9)$$

Функция корреляционных коэффициентов может принимать значения от +1 (полная статистическая корреляция случайных процессов на интервалах  $t$  и  $t+\tau$ ) до -1 (полная статистическая противоположность процессов на этих интервалах). Попутно отметим, что в математической статистике, а также довольно часто и в технической литературе, эту функцию называют функцией корреляции. При  $\tau=0$  значение  $\rho_X$  равно 1, а функция автоковариации вырождается в дисперсию случайного процесса:

$$K_X(t) = D_X(t)$$

Отсюда следует, что для случайных процессов и функций основными характеристиками являются функции математического ожидания и корреляции (ковариации). Особой необходимости в отдельной функции дисперсии не имеется.

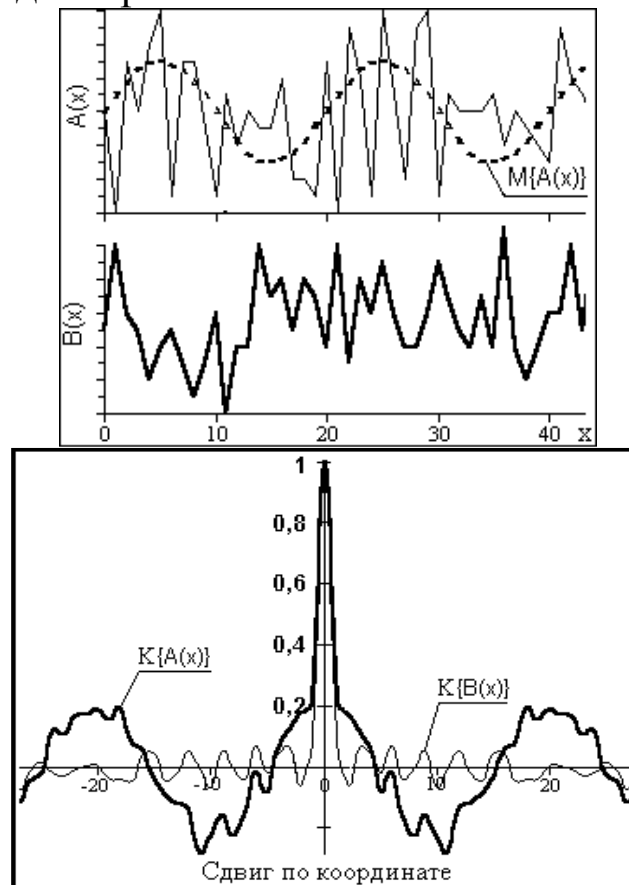


Рис.7.5. Реализации и ковариационные функции случайных процессов

Примеры реализаций двух различных случайных процессов и их нормированных ковариационных функций приведены на рис. 7.5  
***Свойства функций автоковариации и автокорреляции.***

1. Максимум функций наблюдается при  $\tau = 0$ . Это очевидно, т.к. при  $\tau = 0$  вычисляется степень связи отсчетов с собой же, которая не может быть меньше связи разных отсчетов. Значение максимума функции корреляции равно средней мощности сигнала.

2. Функции автокорреляции и автоковариации являются четными:  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ . Последнее также очевидно:  $X(t)X(t+\tau) = X(t-\tau)X(t)$  при  $t = t-\tau$ . Говоря иначе, моменты двух случайных величин  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  не зависят от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, и соответственно симметричны относительно своих аргументов:  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$ .

3. При  $\tau \rightarrow \infty$  значения функции автоковариации для сигналов, конечных по энергии, стремятся к нулю, что прямо следует из физического смысла этой функции. Это позволяет ограничивать длину определенным максимальным значением  $\tau_{\max}$  - радиусом корреляции, за пределами которого отсчеты можно считать независимыми. Интегральной характеристикой времени корреляции случайных величин обычно считают *эффективный интервал корреляции*, определяемый по формуле:

$$T_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_X(\tau)| d\tau = \frac{1}{K_X(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |K_X(\tau)| d\tau \quad (7.10)$$

Отсчеты (сечения) случайных функций, отстоящие друг от друга на расстояние большее  $T_k$ , при инженерных расчетах считают некоррелированными.

4. Если к случайной функции  $X(t)$  прибавить неслучайную функцию  $f(t)$ , то ковариационная функция не изменяется. Обозначим новую случайную функцию как  $Y(t) = X(t) + f(t)$ . Функция математического ожидания новой величины:  $m_Y(t) = m_X(t) + f(t)$ . Отсюда следует, что  $Y(t) - m_Y(t) = X(t) + f(t) - m_X(t) - f(t)$ , т.е.  $Y(t) - m_Y(t) = X(t) - m_X(t)$  и, соответственно,  $K_Y(t_1; t_2) = K_X(t_1; t_2)$ .

5. Если случайную функцию  $X(t)$  умножить на неслучайную функцию  $f(t)$ , то ее корреляционная функция  $R_x(t_1, t_2)$  умножится на  $f(t_1)f(t_2)$ . Доказательство выполняется аналогично п.4.

6. При умножении функции случайного процесса на постоянное значение  $C$  значения функции автоковариации увеличиваются в  $C^2$  раз.

**Взаимные моменты случайных процессов** второго порядка дают возможность оценить совместные свойства двух случайных

процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  путем анализа произвольной пары выборочных функций  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$ .

Мера связи между двумя случайными процессами  $X(t)$  и  $Y(t)$  также устанавливается корреляционными функциями, а именно - функциями взаимной корреляции и взаимной ковариации. В общем случае, для произвольных фиксированных моментов времени  $t_1 = t$  и  $t_2 = t + \tau$ :

$$R_{XY}(t, t + \tau) = M\{X(t)Y(t + \tau)\} \quad (7.11)$$

$$K_{XY}(t, t + \tau) = M\{(X(t) - m_X(t))(Y(t + \tau) - m_Y(t + \tau))\} \quad (7.12)$$

Взаимные функции являются произвольными функциями, не обладают свойствами четности или нечетности, и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} R_{XY}(-\tau) &= R_{YX}(\tau) \\ |R_{XY}(\tau)|^2 &\leq R_X(0)R_Y(0) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Если один из процессов центрированный, то имеет место равенство  $R_{XY}(t) = K_{XY}(t)$ .

Нормированная взаимная ковариационная функция (коэффициент корреляции двух процессов) характеризует степень линейной зависимости между случайными процессами при данном сдвиге  $\tau$  одного процесса по отношению ко второму и определяется выражением:

$$\rho_{XY}(\tau) = K_{XY}(\tau)/(\sigma_X\sigma_Y) \quad (7.14)$$

**Статистическая независимость случайных процессов** определяет отсутствие связи между значениями двух случайных величин  $X$  и  $Y$ . Это означает, что плотность вероятности одной случайной величины не зависит от того, какие значения принимает вторая случайная величина. Двумерная плотность вероятностей при этом должна представлять собой произведения одномерных плотностей вероятностей этих двух величин:

$$f(x, y) = f(x) f(y).$$

Это условие является обязательным условием статистической независимости случайных величин. В противном случае между случайными величинами может существовать определенная статистическая связь, как линейная, так и нелинейная. Мерой линейной статистической связи является коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = [M\{X \cdot Y\} - M\{X\} \cdot M\{Y\}]/\sqrt{D_X D_Y}.$$

Значения  $r_{XY}$  могут изменяться в пределах от -1 до +1. В частном случае, если случайные величины связаны линейным соотношением  $x = ay + b$ , коэффициент корреляции равен  $\pm 1$  в зависимости от знака константы  $a$ . Случайные величины некоррелированы при  $r_{XY} = 0$ , при этом из выражения для  $r_{XY}$  следует:

$$M\{X \cdot Y\} = M\{X\} \cdot M\{Y\}.$$

Из статистической независимости величин следует их некоррелированность. Обратное не очевидно. Так, например, случайные величины  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ , где  $\varphi$  - случайная величина с равномерным распределением в интервале  $0 \dots 2\pi$ , имеют нулевой коэффициент корреляции, и вместе с тем их зависимость очевидна.

### 7.3. Классификация случайных процессов

Случайные процессы различают по степени однородности их протекания во времени (по аргументу). Кроме моментов первого и второго порядка случайные процессы имеют моменты и более высоких порядков. По мере повышения порядка моментов вероятностная структура случайных процессов и их выборочных реализаций описывается все более детально. Однако практическая оценка этих моментов по выборкам ограничена, в основном, только стационарными случайными процессами.

**Стационарные процессы.** Процесс называют стационарным (более точно – слабо стационарным), если плотность вероятностей процесса не зависит от начала отсчета времени и если на интервале его существования выполняются условия постоянства математического ожидания и дисперсии, а корреляционная функция является функцией только разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ , т.е.:

$$\begin{aligned} m_X(t_1) &= m_X(t_2) = m_X = \text{const} \\ D_X(t_1) &= D_X(t_2) = D_X = \text{const} \\ R_X(t_1, t_1 + \tau) &= R_X(t_2 - \tau, t_2) = R_X(\tau) = R_X(-\tau) \\ r_X(\tau) &= \frac{R_X(\tau)}{D_X}, r_X(0) = 1, |r_X(\tau)| \leq 1, r_X(-\tau) = r_X(\tau) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Последние выражения свидетельствует о четности корреляционной (а равно и ковариационной) функции и функции корреляционных коэффициентов. Из него вытекает также еще одно свойство смешанных моментов стационарных процессов:

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0), |K_X(\tau)| \leq K_X(0) = D_X$$

Чем медленнее по мере увеличения значений  $\tau$  убывают функции  $R_X(\tau)$  и  $r_X(\tau)$ , тем больше интервал корреляции случайного процесса, и тем медленнее изменяются во времени его реализации.

Если от времени не зависят и моменты более высоких порядков (в частности, асимметрия и эксцесс), то такой процесс считается строго стационарным. В общем случае класс строго стационарных процессов входит в класс слабо стационарных. И только в случае гауссовых случайных процессов слабая стационарность автоматически влечет строгую, поскольку все характеристики этих процессов определяются средним значением и корреляционной функцией.

Стационарные случайные процессы наиболее часто встречаются при решении физических и технических задач. Теория стационарных случайных функций разработана наиболее полно. Случайные процессы, удовлетворяющие условиям стационарности на ограниченных, интересующих нас интервалах, также обычно рассматривают в классе стационарных и называют квазистационарными.

**Нестационарные процессы.** В общем случае значения функций математического ожидания, дисперсии и корреляции могут быть зависимыми от момента времени  $t$ , т.е. изменяться во времени. Такие процессы составляют класс нестационарных процессов.

**Эргодические процессы.** Строго корректно характеристики случайных процессов оцениваются путем усреднения по ансамблю реализаций в определенные моменты времени (по сечениям процессов). Но большинство стационарных случайных процессов обладает эргодическим свойством. Сущность его заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же как по сечению для ансамбля реализаций, так и по координате развития. Такие процессы получили название эргодических (ergodic). Для эргодических процессов имеет место:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau = 0 \quad (7.16)$$

Если ковариационная функция процесса стремится к нулю при

возрастании значения аргумента ( $\tau$ ), то процесс относится к числу эргодических, по крайней мере, относительно моментов первого и второго порядков.

#### 7.4. Функции спектральной плотности

**Каноническое разложение случайных функций.** Введем понятие простейшей случайной функции, которая определяется выражением:

$$X(t) = X \cdot \varphi(t), \quad (7.17)$$

где  $X$  - обычная случайная величина,  $\varphi(t)$  - произвольная неслучайная функция. Математическое ожидание простейшей случайной функции:

$$m_X(t) = M\{X(t)\} = \varphi(t) \cdot M\{X\} = \varphi(t) \cdot m_X, \quad (7.18)$$

где  $m_X$  - математическое ожидание случайной величины  $X$ . При  $m_X = 0$  математическое ожидание  $m_X(t)$  также равно нулю для всех  $t$  и функция (7.17) в этом случае называется элементарной случайной функцией. Ковариационная функция элементарной случайной функции определится выражением:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\{X(t_1)X(t_2)\} = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M\{X^2\} \\ &= \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_X \end{aligned} \quad (7.19)$$

где  $D_X$  - дисперсия случайной величины  $X$ .

Центрированную случайную функцию  $\dot{X}(t)$  можно представить суммой взаимно некоррелированных элементарных случайных функций:

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^m X_i \varphi_i(t) \quad (7.20)$$

Из взаимной некоррелированности элементарных случайных функций следует взаимная некоррелированность величин  $X_i$ . Математическое ожидание и ковариационная функция случайной функции  $\dot{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} M\{\dot{X}(t)\} &= M\left\{\sum_{i=1}^m X_i \varphi_i(t)\right\} = 0 \\ K_X(t_1, t_2) &= M\{\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\} = M\left\{\sum_{i,j} X_i \varphi_i(t_1) X_j \varphi_j(t_2)\right\} = \\ &= \sum_{i,j} \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) M\{X_i X_j\} \end{aligned}$$



В силу взаимной некоррелированности парных значений  $X_i X_j$  имеет место  $M\{X_i X_j\} = 0$  при  $i \neq j$ , и все члены суммы в последнем выражении равны нулю, за исключением значений при  $i = j$ , для которых  $M\{X_i X_j\} = M\{X_i^2\} = D_i$ . Отсюда:

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i \quad (7.21)$$

Произвольная нецентрированная случайная функция соответственно может быть представлена в виде

$$X(t) = m_X(t) + \dot{X}(t) = m_X(t) + \sum_{i=1}^m X_i \varphi_i(t) \quad (7.22)$$

с математическим ожиданием  $m_X(t)$  и с той же самой ковариационной функцией (7.21) в силу свойств ковариационных функций, где  $\dot{X}(t)$  - флюктуационная составляющая случайной функции  $X(t)$ . Выражение (7.22) и является каноническим разложением функции  $X(t)$ . Случайные величины  $X_i$  называются коэффициентами разложения, функции  $\varphi_i$  - координатными функциями разложения. При  $t_1 = t_2$  из (7.21) получаем функцию дисперсии случайной функции  $X(t)$ :

$$D_X(t) = \sum_{i=1}^m [\varphi_i(t)]^2 D_i \quad (7.23)$$

Таким образом, зная каноническое разложение (7.22) функции  $X(t)$ , можно сразу определить каноническое разложение (7.21) ее ковариационной функции, и наоборот. Канонические разложения удобны для выполнения различных операций над случайными функциями. Это объясняется тем, что в разложении зависимость функции от аргумента  $t$  выражается через неслучайные функции  $\varphi_i(t)$ , а соответственно операции над функцией  $X(t)$  сводятся к соответствующим операциям математического анализа над координатными функциями  $\varphi_i(t)$ .

В качестве координатных функций разложения, как и при анализе детерминированных сигналов, обычно используются гармонические синус-косинусные функции, а в общем случае комплексные экспоненциальные функции  $e^{j\omega t}$ . С учетом последнего предварительно рассмотрим особенности представления случайных функций в комплексной форме.

**Финитное преобразование Фурье** случайных функций. По аналогии с неслучайными функциями, удовлетворяющими условиям Дирихле, отдельно взятая на интервале  $(0; T)$  реализация  $x_k(t)$  стационарного случайного процесса  $\dot{X}(t)$  может быть представлена в

виде ряда Фурье:

$$x_k(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_{x,k}(\omega_i) e^{j\omega_i t} \quad (7.24)$$

$$V_{x,k}(\omega_i) = \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) e^{-j\omega_i t} dt, \quad (7.25)$$

или, в односторонней тригонометрической форме:

$$x_k(t) = A_{x,k}(0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (A_{x,k}(\omega_i) \cos(\omega_i t) + B_{x,k}(\omega_i) \sin(\omega_i t)), \quad (7.29)$$

$$A_{x,k}(\omega_i) = 1/T \int_0^T x_k(t) \cos(\omega_i t) dt \quad (7.26)$$

$$B_{x,k}(\omega_i) = 1/T \int_0^T x_k(t) \sin(\omega_i t) dt \quad (7.27)$$

где  $\omega_i = i\Delta\omega$  - частоты спектра,  $\Delta\omega = 2\pi/T$  - шаг по частоте. Выражения (7.25) обычно называют *спектральными характеристиками реализаций*. Из сравнения выражений (7.20) и (7.24) нетрудно сделать заключение, что выражение (7.24) относится к числу канонических разложений случайных функций, при этом спектральная характеристика  $V_{x,k}(\omega)$  и ее составляющие  $A_{x,k}(\omega)$  и  $B_{x,k}(\omega)$ , также являются случайными функциями частоты - единичными реализациями случайных функций  $V_x(\omega)$ ,  $A_x(\omega)$  и  $B_x(\omega)$ . Соответственно, и частотное распределение амплитуд и фаз составляющих гармонических колебаний случайного процесса  $\dot{X}(t)$  представляет собой случайные функции с соответствующими неслучайными функциями дисперсий.

Если функция  $\dot{X}(t)$  является дискретной последовательностью случайных величин  $\dot{X}(n \cdot t)$  в интервале по  $n$  от 0 до  $N$ , то, как это и положено для дискретных преобразований Фурье, расчет спектральных характеристик выполняется в Главном частотном диапазоне (до частоты Найквиста  $\omega_N = \pi/\Delta t$ ), с заменой в выражениях (7.25) интегрирования на суммирование по  $n$  и с соответствующим изменением пределов суммирования в выражениях (7.24).

Спектральные характеристики единичных реализаций случайных процессов интереса, как правило, не представляют, и на практике используются довольно редко. Спектральная характеристика случайной функции  $\dot{X}(t)$ , как ансамбля реализаций, может быть определена осреднением функций (7.24-25) по реализациям, в результате которого мы получим те же самые функции (7.24-25),

только без индексов  $k$ . При этом, в силу центрированности стационарной случайной функции  $\dot{X}(t)$ , мы должны иметь:

$$M\{X(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M\{V_x(\omega_i)\}e^{j\omega_i t} = 0 \quad (7.29)$$

Последнее будет выполняться при условии  $M\{V_x(\omega_i)\} = 0$ , т.е. математическое ожидание значений спектральной характеристики центрированного стационарного случайного процесса должно быть равно нулю на всех частотах. Другими словами, спектральной характеристики центрированного стационарного случайного процесса не существует. Существуют только спектральные характеристики его отдельных реализаций, которые и используются, например, для моделирования этих реализаций.

Для произвольных нецентрированных случайных процессов  $X(t)$ , при записи последних в форме  $X(t) = m_x(t) + \dot{X}(t)$ , будем соответственно иметь преобразование Фурье:

$$m_x(t) + \dot{X}(t) \Leftrightarrow m_x(\omega) + V_x(\omega) = m_x(\omega),$$

т.е., по существу, функцию спектра (или спектральной плотности) неслучайной функции математического ожидания случайного процесса, естественно, в пределах той точности, которую может обеспечить выборочный ансамбль реализаций. Это лишний раз подтверждает отсутствие в спектрах случайных процессов какой-либо информации о флюктуационной составляющей процессов, и говорит о том, что фазы спектральных составляющих в реализациях процесса являются случайными и независимыми.

*С учетом вышеизложенного, под спектрами случайных процессов (или спектральной плотностью при интегральном преобразовании Фурье) повсеместно понимается не преобразования Фурье собственно случайных функций, а преобразования Фурье функций мощности случайных процессов, поскольку функции мощности не зависят от соотношения фаз спектральных составляющих процессов.*

**Спектры мощности случайных функций** определяются аналогично спектрам мощности детерминированных сигналов. Средняя мощность случайного процесса  $X(t)$ , зарегистрированного в процессе одной реализации на интервале  $0 - T$ , с использованием равенства Парсеваля может быть вычислена по формуле:

$$W_T = \int_0^T [x^2(t)/T] dt = \int_{-\infty}^{\infty} [|X_T(f)|^2/T] df,$$

где  $X(f)$  – спектральная плотность единичной реализации  $x(t)$ . При увеличении интервала  $T$  энергия процесса на интервале неограниченно нарастает, а средняя мощность стремится к определенному пределу:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [|X_T(f)|^2] df,$$

где подынтегральная функция представляет собой спектральную плотность мощности данной реализации случайного процесса

$$W(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2. \quad (7.30)$$

Очень часто это выражение называют просто спектром мощности. Плотность мощности является вещественной, неотрицательной и четной функцией частоты. В общем случае, плотность мощности необходимо усреднять по множеству реализаций, но для эргодических процессов допустимо усреднение по одной достаточно длительной реализации.

**Теорема Винера-Хинчина.** Рассмотрим сигнал  $q(t)$ , представляющий собой одну реализацию случайного стационарного эргодического процесса длительностью  $T$ . Для сигнала  $q(t)$  может быть определен спектр  $Q(\omega)$ . Если сдвинуть на  $\tau$  реализацию процесса, то получим спектр  $Q(\omega) \exp(j\omega\tau)$ . Для вещественных сигналов  $Q(\omega) = Q^*(\omega)$  равенство Парсеваля по энергии взаимодействия двух сигналов

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (7.31)$$

может быть записано в следующей форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)q(t+\tau)dt = \frac{1}{2}\pi \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)Q^*(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \quad (7.32)$$

Поделим обе части данного равенства на  $T$  и перейдем к пределу при  $T \Rightarrow \infty$ , при этом в его левой части мы увидим выражение для функции корреляции, а в правой части - преобразование Фурье спектра мощности сигнала:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t)q(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega,$$

(7.33)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.34)$$

Отсюда следует, что корреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса представляет собой обратное преобразование Фурье его спектра мощности. Соответственно, для спектра мощности случайного процесса имеем прямое преобразование Фурье:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.35)$$

В этом состоит суть теоремы Винера-Хинчина. Функции  $W(\omega)$  и  $R(\tau)$  являются вещественными и четными, а соответственно в тригонометрической форме:

$$R(\tau) = 2 \int_0^{\infty} W(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad W(f) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau.$$

**Спектр ковариационных функций.** Так как ковариационные функции стационарных процессов являются частным случаем корреляционных функций, то эти выражения действительны и для ФАК, а, следовательно, преобразования Фурье ковариационных функций, являются спектрами мощности флюктуирующей составляющей процессов. С этих позиций дисперсия случайных процессов представляет собой среднюю мощность его флюктуаций

$$K(\tau = 0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega$$

т.е. равна суммарной мощности всех его частотных составляющих процессов.

При представлении ковариационной функции на интервале 0-T, шаг по спектру функции с учетом четности ковариационной функции устанавливается равным  $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$ ,  $\omega_i = i\Delta\omega$ , а спектр определяется обычно непосредственно по косинусам в односторонней форме:

$$K_x(\tau) = \frac{D_x(0)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} D_x(\omega_i) \cos(\omega_i\tau) \quad (7.36)$$

$$D_x(\omega_i) = \frac{1}{T} \int_0^T K_x(\tau) \cos(\omega_i\tau) d\tau, \quad (7.37)$$

где  $D_x(\omega_i)$  в соответствии с (7.21) - дисперсии случайных

величин  $V_x(\omega_i)$ , а равно и  $A_x(\omega_i)$  и  $B_x(\omega_i)$ , в разложениях (7.24). В комплексной форме, как обычно:

$$K_x(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} D_x(\omega_i) e^{j\omega_i \tau}, \quad (7.38)$$

$$D_x(\omega_i) = \frac{2}{T} \int_0^T K_x(\tau) e^{-j\omega_i \tau} d\tau \quad (7.39)$$

Спектры ковариационных функций всегда ограничены ( $D(\omega) \neq \infty$ ) и неотрицательны ( $D(\omega) \geq 0$ ), при двустороннем представлении всегда четные ( $D(-\omega) = D(\omega)$ ). Пример спектров в одно- и двустороннем представлении приведен на рис. 7.6.



Рис. 7.6. Спектры случайных функций

Дисперсия стационарного случайного процесса  $X(t)$  может определяться по формуле (7.38) при  $\tau = 0$ :

$$D_x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} D_x(\omega_i), \quad (7.40)$$

т.е. дисперсия стационарного случайного процесса равна сумме дисперсий всех случайных гармоник ее спектрального разложения.

**Эффективная ширина спектра мощности** является обобщенной характеристикой спектра случайного процесса и определяется по формуле:

$$B_k = \Delta\omega D_x / D_{max}, \quad (7.41)$$

где  $D_{max}$  максимальное значение функции  $D_x(\omega_i)$ . Отметим, что ширина спектра является практической характеристикой случайного процесса, и вычисляется, как правило, для реальных частот по одностороннему спектру процесса.

При использовании предельного перехода  $T \Rightarrow \infty$  и соответственно интегралов Фурье в выражениях (7.38), двусторонние функции дисперсий  $D(\omega_i)$  заменяются функциями  $S(\omega)$ , а односторонние — функциями  $G(\omega)$ , которые называют соответственно дву- и односторонними функциями *спектральной плотности* случайных процессов. Такое же индексирование в научно-технической литературе применяют и для спектров корреляционных функций, а зачастую и для дискретных преобразований

ковариационных функций вместо  $D(\omega_i)$ , хотя последнее применительно к ковариационным функциям более точно отражает физическую сущность величин. Но оно может считаться вполне приемлемым для сохранения общности математических описаний.

*Эффективная ширина спектра для функций спектральной плотности случайных процессов:*

$$B_k = \int_0^{\infty} G_x(f) df / G_x(f)_{max} = \frac{\int_0^{\infty} S_x(f) df}{S_x(f)_{max}} = \frac{K_x(0)}{S_x(f)_{max}}. \quad (7.39)$$

**Соотношение неопределенности** связывает эффективную ширину спектра  $B_k$  с эффективным интервалом ковариации  $T_k$ . Для его определения найдем произведение  $B_k T_k$  случайного процесса с использованием формул (7.10) и (7.39):

$$B_k T_k = 2 \int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau / S_x(f)_{max}$$

Оценка этого произведения и приводит к соотношению неопределенности:

$$B_k T_k \geq 1/2. \quad (7.40)$$

Следовательно, с уменьшением эффективной ширины спектра увеличивается эффективный интервал ковариации случайного процесса, и наоборот.

**Взаимные спектральные функции.** Статистическая связь двух случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  оценивается по функциям взаимной ковариации  $K_{xy}(\tau)$  или  $K_{yx}(\tau)$ . Функции взаимной ковариации в общем случае являются произвольными, и соответственно функции взаимного спектра представляют собой комплексные выражения:

$$S_{xy}(-\omega) = S_{yx}^*(\omega) = S_{yx}(\omega).$$

Квадратурным аналогом нормированной взаимной ковариационной функции или функции коэффициентов ковариации двух процессов (7.14) в спектральной области является *функция когерентности*, которая определяется выражением:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}, \quad (7.41)$$

и для любых  $\omega$  удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$$

Функция когерентности обычно используется при анализе линейных систем преобразования входной функции  $X(t)$  в выходную функцию  $Y(t)$ .

В заключение данного раздела еще раз отметим, что спектральные плотности случайных процессов и спектры плотности мощности, это одно и то же понятие. Оба термина используются достаточно широко в научно-технической литературе. Учитывая то обстоятельство, что понятие мощности по своему смыслу больше связано с энергетическими понятиями, а понятие спектральной плотности - с анализом сигналов и систем, то при рассмотрении случайных сигналов и процессов используется, в основном, понятие спектральной плотности или (для дискретных величин) спектров случайных сигналов и процессов.



## 8. Компьютерные методы статистической обработки результатов инженерного эксперимента

### 8.1. Общие замечания

Рассмотрим возможности использования компьютерных пакетов для статистической обработки данных, полученных в ходе инженерного эксперимента. Преимущества использования в этой области компьютерных программных продуктов очевидны, однако сделаем некоторые замечания.

В настоящее время темпы развития компьютерных технологий настолько велики, что создаваемые программные средства обработки информации, в том числе и статистической, совершенствуются практически с каждым месяцем, приобретая все новые и новые возможности. С распространением мощных персональных компьютеров стало возможно реализовывать методы расчета, которые раньше считались очень трудоемкими в вычислениях. На рынке программного обеспечения существуют достаточно сложные пакеты прикладных программ, профессионально ориентированные на обработку статистической информации и позволяющие выявлять закономерности на фоне случайностей, делать обоснованные выводы и прогнозы, оценивать вероятности их выполнения. Эти программные среды обладают высокой степенью универсальности, а их применимость и технология использования практически не зависят от предметной области (металлургия, экономика, медицина и др.).

Тенденцией развития современных компьютерных технологий является объединение (интеграция) функций отдельных пакетов программ (математических, статистических, текстовых, графических, коммуникационных и др.) в так называемые интегрированные компьютерные среды. Эта особенность наиболее четко

прослеживается с выходом новых версий популярных программных продуктов, когда возможности существующих программ расширяются за счет включения в них новых функций. В качестве примера можно привести пакет Microsoft Office, включающий в себя наряду со средствами создания и обработки текста (Word), баз данных (Access), презентаций (Power Point) также табличный процессор Excel, предназначенный, вообще говоря, для создания электронных таблиц и манипулирования их данными. В состав Microsoft Excel входит набор средств анализа данных (пакет анализа), предназначенный для решения сложных статистических задач. Для проведения анализа данных с помощью этих средств достаточно указать (отметить) диапазон входных данных из таблицы и выбрать необходимые параметры; расчет будет проведен с помощью подходящей статистической функции, а результат будет помещен в выходной диапазон таблицы. Кроме того, специальные средства позволяют представить результаты в графическом виде. Для успешного применения процедур анализа в Microsoft Excel также необходимы соответствующие знания в области статистических расчетов, для которой эти инструменты были разработаны. Несмотря на то, что электронные таблицы уступают по своим возможностям специализированным пакетам статистической обработки данных, изучение возможностей и владение навыками работы с Microsoft Excel делает их мощным инструментом в руках инженера-исследователя.

Компьютерные системы для анализа данных - статистические пакеты - являются, по сравнению с другими наукоемкими программами, пожалуй, наиболее широко применяемыми в инженерной практике и исследовательской работе в разнообразных областях деятельности. Статистический пакет должен удовлетворять определенным требованиям, на которые в первую очередь надо обращать внимание при его выборе:

- модульность программного обеспечения, автоматическая организация процесса обработки данных и связей между модулями пакета;
- развитая система поддержки при выборе способов обработки данных, визуальном отображении результатов и их интерпретации;
- наличие средств сохранения результатов проделанного анализа в виде графиков и таблиц
- совместимость с другим программным обеспечением.

Современная программа анализа данных, в большинстве случаев, представляет собой электронные таблицы с ограниченными по сравнению с обычными электронными таблицами средствами манипулирования данными, но с достаточно мощными методами расчетов по этим данным. Общая технология статистического анализа данных с использованием статистического пакета включает в себя следующие основные этапы:

- 1) ввод данных в электронную таблицу с исходными данными и их предварительное преобразование перед анализом (структурирование, построение необходимых выборок, ранжирование и т. д.);
- 2) визуализация данных при помощи того или иного типа графиков;
- 3) определение подходящих методов статистической обработки;
- 4) применение конкретной процедуры статистической обработки;
- 5) вывод результатов анализа в виде графиков и электронных таблиц с численной и текстовой информацией;
- 6) подготовка, печать и сохранение отчета.

Для расчетного анализа данных используются отдельные библиотеки модулей. Модуль - это внешняя процедура или программа на языке программирования высокого уровня, удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям, наиболее важными из которых являются: ограничения на способ аварийного завершения работы модуля; на способы связи по

информации, например на допустимость переменных внешнего типа и использование общей области памяти; на возможность передачи управления между модулями с помощью операторов вызова, расположенных в теле модуля; на использование операторов ввода-вывода. Отметим наиболее типовые расчетные модули современных статических пакетов, которые условно разделим на следующие три группы:

- описательная статистика и разведочный анализ исходных данных;
- статистическое исследование зависимостей;
- вспомогательные программы.

Модуль описательной статистики и разведочного анализа исходных данных позволяет проводить:

- анализ резко выделяющихся наблюдений;
- проверку статистической независимости рядов наблюдений;
- определение основных числовых характеристик и частотную обработку исходных данных (построение гистограмм, полигонов частот, вычисление выборочных средних, дисперсий и т.д.);
- расчет критериев однородности (средних, дисперсий, законов распределения и т.д.);
- определение критериев согласия (хи-квадрат, Колмогорова-Смирнова и др.);
- статистическое оценивание параметров;
- вычисление наиболее распространенных законов распределения вероятностей (нормального, Пуассона, хи-квадрат и некоторых других)
- визуализацию анализируемых многомерных статистических данных.

Модуль статистического исследования зависимостей является достаточно объемной частью любого статистического пакета. Он включает в себя решение следующих задач:

- корреляционно-регрессионный анализ;

- дисперсионный анализ;
- планирование регрессионных экспериментов и выборочных обследований и др.

Вспомогательные программы расширяют возможности статистических пакетов и реализуют, в частности, оптимизационные алгоритмы, вычислительные процедуры, основанные на нейросетях и генетических алгоритмах, задачи статистического моделирования на ЭВМ, которые являются полезными составными элементами компьютерных имитационных экспериментов, используемых при анализе сложных реальных систем.

Ниже в табл. 8.1 представлены адреса электронных ресурсов, содержащих информацию о некоторых распространенных статистических пакетах.

Таблица 8.1

Адрес	Название программы	Разработчик
<a href="http://www.statsoft.ru">www.statsoft.ru</a>	STATISTICA	StatSoft Inc., США
<a href="http://www.spss.ru">www.spss.ru</a>	SPSS	SPSS Inc., США
<a href="http://www.stat-graphics.com">www.stat-graphics.com</a>	STATGRAPHICS Plus	Manugistics Inc.
<a href="http://www.sas.com">www.sas.com</a>	StatView	SAS Institute Inc.
<a href="http://www.ncss.com">www.ncss.com</a>	NCSS	NCSS Statistical Software
<a href="http://www.minitab.com">www.minitab.com</a>	Minitab	Minitab Inc.

## 8.2. Использование пакета MS EXCEL для статистической обработки экспериментальных данных

На базе электронных таблиц можно провести некоторую статистическую обработку данных для большинства инженерных задач. Функции, реализующие статистические методы обработки и анализа данных, в Microsoft Excel реализованы в виде специального программного расширения - надстройки «Пакет анализа», которая

входит в поставку данного программного продукта и может устанавливаться по желанию пользователя.

Установка надстройки «Пакет анализа» производится из меню «Сервис/Надстройки», после чего в диалоговом окне «Надстройки» необходимо отметить флажок пункта «Пакет анализа» и нажать кнопку ОК.

Ниже в таблице 8.2. приведены основные функции пакета анализа.

Таблица 8.2

Функции	Описание
ВЕРОЯТНОСТЬ	Возвращает вероятность того, что значение из интервала находится внутри заданных пределов. Если верхний_предел не задан, то возвращается вероятность того, что значения в аргументе x_интервал равняются значению аргумента нижний_предел. $ВЕРОЯТНОСТЬ(x\_интервал; интервал\_вероятностей; нижний\_предел; верхний\_предел)$ .
ДИСП, ДИСПР	Вычисляет дисперсию для генеральной совокупности $ДИСПР(число1; число2; \dots)$
ДОВЕРИТ	Возвращает доверительный интервал для среднего генеральной совокупности $ДОВЕРИТ(альфа; станд\_откл; размер)$
КВАДРОТКЛ	Возвращает сумму квадратов отклонений точек данных от их среднего $КВАДРОТКЛ(число1; число2; \dots)$
КВПИРСОН	Возвращает квадрат коэффициента корреляции Пирсона для точек данных в аргументах известные_значения_y и известные_значения_x $КВПИРСОН(известные\_значения\_y; известные\_значения\_x)$
КОРРЕЛ	Возвращает коэффициент корреляции между интервалами ячеек массив1 и массив2 $КОРРЕЛ(массив1; массив2)$
ЛГРФПРИБЛ	В регрессионном анализе вычисляет экспоненциальную кривую, аппроксимирующую данные, и возвращает массив значений, описывающий эту кривую. Поскольку данная функция возвращает массив значений, она должна вводиться как формула для работы с массивами. Уравнение кривой

	<p>следующее: <math>y = b \cdot m^x</math> или <math>y = (b - (m_1^{x^1}) - (m_2^{x^2}) - \dots - (m_n^{x^n}))</math> (при наличии нескольких значений <math>x</math>), где зависимые значения <math>y</math> являются функцией независимых значений <math>x</math>. Значения <math>m</math> являются основанием для возведения в степень <math>x</math>, а значения <math>b</math> постоянны. Отметим, что <math>y</math>, <math>x</math> и <math>m</math> могут быть векторами. Функция ЛГРФПРИБЛ возвращает массив <math>\{m_n, m_{n-1}, \dots, m_1, b\}</math>.  ЛГРФПРИБЛ(известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)</p>
ЛИНЕЙН	<p>Рассчитывает статистику для ряда с применением метода наименьших квадратов, чтобы вычислить прямую линию, которая наилучшим образом аппроксимирует имеющиеся данные. Функция возвращает массив, который описывает полученную прямую. Поскольку возвращается массив значений, функция должна задаваться в виде формулы массива.  ЛИНЕЙН(известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)</p>
МАКС	<p>Возвращает наибольшее значение из набора значений  МАКС(число1; число2; ...)</p>
МЕДИАНА	<p>Возвращает медиану заданных чисел  МЕДИАНА(число1; число2; ...)</p>
МИН	<p>Возвращает наименьшее значение в списке аргументов  МИН(число1; число2; ...)</p>
МОДА	<p>Возвращает наиболее часто встречающееся или повторяющееся значение в массиве или интервале данных  МОДА(число1; число2; ...)</p>
НАКЛОН	<p>Возвращает наклон линии линейной регрессии для точек данных в аргументах известные_значения_y и известные_значения_x. Наклон определяется как частное от деления расстояния по вертикали на расстояние по горизонтали между двумя любыми точками прямой, то есть наклон - это скорость изменения значений вдоль прямой  НАКЛОН(известные_значения_y; известные_значения_x)</p>
НОРМАЛИЗАЦИЯ	<p>Возвращает нормализованное значение для распределения, характеризуемого средним и стандартным отклонением  НОРМАЛИЗАЦИЯ( ; среднее; стандартное_откл)</p>
НОРМОБР	<p>Возвращает обратное нормальное распределение для указанного среднего и стандартного отклонения  НОРМОБР(вероятность; среднее; стандартное_откл)</p>
НОРМРАСП	<p>Возвращает значение нормальной функции распределения</p>

	для указанного среднего и стандартного отклонения НОРМРАСП^; среднее; стандартное_откл; интегральная)
НОРМСТОБР	Возвращает обратное значение стандартного нормального распределения и НОРМСТОБР(вероятность)
НОРМСТРАСП	Возвращает стандартное нормальное интегральное распределение. Это распределение имеет среднее, равное нулю, и стандартное отклонение, равное единице. Эта функция используется вместо таблицы для стандартной нормальной кривой НОРМСТРАСП^)
ОТРЕЗОК	Вычисляет точку пересечения линии с осью y, используя известные_значения_x и известные_значения_y ОТРЕЗОК(известные_значения_x; известные_значения_y)
ПИРСОН	Возвращает коэффициент корреляции Пирсона r (выборочный коэффициент корреляции), безразмерный индекс в интервале от -1,0 до 1,0 включительно ПИРСОН(массив1; массив2)
СРГЕОМ	Возвращает среднее геометрическое значений массива или интервала положительных чисел СРГЕОМ(число1; число2; ...)
СРЗНАЧ	Возвращает среднее арифметическое своих аргументов СРЗНАЧ(число1; число2; ...)
СРОТКЛ	Среднее абсолютных значений отклонений точек данных от среднего СРОТКЛ(число1; число2; ...)
СТАНДОТКЛОН	Оценивает стандартное отклонение по выборке СТАНДОТКЛОН(число1; число2; ...)
СТАНДОТКЛОНП	Вычисляет стандартное отклонение по генеральной совокупности СТАНДОТКЛОНП(число1; число2; ...)
СТЬЮДРАСП	Возвращает t-распределение Стьюдента СТЬЮДРАСП(x; степени_свободы; хвосты)
СТЬЮДРАСПОБ	Возвращает обратное распределение Стьюдента для заданного числа степеней свободы СТЬЮДРАСПОБР(вероятность; степени_свободы)
ТЕНДЕНЦИЯ	Определяет предсказанные значения в соответствии с линейным трендом для заданного массива (методом наименьших квадратов) ТЕНДЕНЦИЯ(известные_значения_y; известные_значения_x; но-вые_значения_x; конст)
ТТЕСТ	Возвращает вероятность, соответствующую критерию



	Стьюдента ТТЕСТ(массив1; массив2; хвосты; тип)
ФИШЕР	Возвращает преобразование Фишера для аргумента x ФИШЕР(x)
ФИШЕРОБР	Возвращает обратное преобразование Фишера ФИШЕРОБР(y)
ХИ2ОБР	Возвращает значение обратное к односторонней вероятности распределения $\chi^2$ (хи-квадрат) ХИ2ОБР(вероятность; степени_свободы)
ХИ2РАСП	Возвращает одностороннюю вероятность (P) распределения $\chi^2$ (хи-квадрат, распределения Пирсона) ХИ2РАСП(x; степени_свободы)
ЧАСТОТА	Вычисляет частоту появления значений в интервале значений и возвращает массив цифр ЧАСТОТА(массив_данных; массив_карманов)
ЭКСЦЕСС	Возвращает эксцесс множества данных ЭКСЦЕСС(число1; число2; ...)
ФРАСП	Возвращает F-распределение вероятности (распределение Фишера) ФРАСП(x;степени_свободы1;степени_свободы2)
ФРАСПОБР	Возвращает обратное значение для F-распределения вероятностей (критерий Фишера) ФРАСПОБР (вероятность;степени_свободы1;степени_свободы2)

## Список использованных источников:

### 1. Подобие и моделирование

1.1 Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.- М.:Наука, 1981.-448 с.

1.2 Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирование/применительно к задачам электроэнергетики/.- М.:Наука,1984.-439 с.

### 2. Планирование эксперимента

2.1. Планирование эксперимента в технике / В.И.Барабашук, Б.П.Креденцер, В.И.Мирошниченко; под. ред.. Б.П.Креденцера.- К.:Техніка ,1984.-200с.

2.2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.-М.:Наука,1971.-283с.

2.3. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии .-М.Высшая школа, 1985.-325 с.

### 3. Статистическая обработка результатов эксперимента

3.1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей,-М.Наука,1969.-576 с.

3.2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.-М.:Наука.-1988.- 480 с.

3.3. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика.-М., Высшая школа, 1973.-368 с.

3.4. Базара М.,Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.-М.,Мир.-1982.-583 с.

3.5. Колкер Я.Д. Математический анализ точности механической обработки деталей.-Киев, Техника.-1976.-200с.

3.6. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента.-М.,Наука.-1971.-192 с.

3.7. Протасов К.С. Статистический анализ экспериментальных данных. -М., Мир, 2005.-142 с.

- 3.8. Письменный Д.Т. конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам.-М., Айрис пресс, 2006.-288 с.
- 3.9. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel.-М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.-448 с.
- 3.10. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций.: Глав.ред. физ.-матем. лит. Изд-ва «Наука», 1968.-663с.